Lectura: Importancia de la física en la medicina

Con el descubrimiento del átomo se comenzó la aplicación de la física en diversos campos de la actividad humana. Uno de estos campos es la medicina. El cuerpo humano funciona con una infinidad de expresiones acompañadas de fenómenos físicos y químicos detectables con instrumentos físicos. Hoy se puede decir que ya estamos cerca del cerebro.

Todo comenzó en 1885, cuando Roentgen, en Berlín, describió los rayos x, iniciando la era de la percepción de las imágenes de partes internas del cuerpo humano. El descubrimiento fue tan espectacular que la gente pensaba que se llegaría a ver el pensamiento. Al año siguiente, Henri Becquerel, en París, descubre la radiactividad, aumentando las aplicaciones de la física en medicina. Gracias a la emisión de radiactividad detectable, los radiotrazadores incorporados en cantidades adecuadas muestran el funcionamiento de órganos o ayudan a identificar tumores malignos.

Además, la propia radiactividad es usada para terapia del cáncer.

Estos avances en la física están relacionados con la comprensión del átomo, compuesto por un núcleo pequeño, donde se concentra casi toda la masa atómica, alrededor del cual giran los electrones. Los rayos x vienen de cambios de orbitales de los electrones y la radiactividad proviene de bruscas palpitaciones del núcleo. Los átomos constituyen moléculas y estás conforman células.

Entonces, la distribución de células puede ser determinada midiendo la distribución de átomos. Utilizar las propiedades de los átomos para identificar su posición es el objetivo de la tecnología de imágenes. Por ejemplo, la emisión de electrones positivos por parte del núcleo de átomos radiactivos permite la tecnología de tomografía por emisión de positrones (TEP). Casi inmediatamente después de salir del núcleo, los positrones chocan con los electrones y se desintegran emitiendo dos rayos energéticos en direcciones opuestas, lo que permite identificar la posición de los núcleos emisores.

El núcleo, que tiene también el comportamiento de un diminuto imán; sometido a una combinación de alto campo magnético y campos electromagnéticos oscilantes, emite radiaciones que permiten identificar su posición. Esta técnica es llamada resonancia magnética nuclear (RMN).

Las imágenes TEP y RMN, combinadas, están facilitando el estudio de la bioquímica y la fisiología de los órganos. Los campos más apasionantes que están siendo desarrollados son los que se refieren al cerebro. Se ha llegado a determinar que cada actividad específica del cerebro corresponde a reacciones bioquímicas en lugares bien localizados. Ello permite concluir que el pensamiento y la inteligencia están repartidos en todo el cerebro. Por ejemplo, cuando uno piensa que está corriendo se pone en actividad una parte del cerebro, diferente a la que correspondería al pensar en una flor. Cada tema de pensamiento tiene su casilla.

El estudio del cerebro con imágenes provenientes de sus átomos y núcleos nos dan luces de los procesos cognitivos, los que permitirán alguna vez que podamos comunicarnos en formas hoy insospechadas, sólo con la mente, por ejemplo.

Como levantándose para competir con estas nuevas técnicas, los rayos x son usados en el marco de la tomografía Computarizada (TC), la que toma imágenes del cuerpo en rebanadas, con un haz de rayos x en abanico, de un espesor de un cm. La computadora sirve para construir una imagen tridimensional a partir de una serie de mediciones. Las imágenes son tan precisas que se puede detectar una hemorragia intercerebral y una infiltración de grasa en el hígado. La TC permite identificar con precisión la forma de tumores, lo que ayuda a un más apropiado tratamiento por irradiación.
Otra técnica que es bastante usada es la de ultrasonido. Como se sabe, el sonar detecta objetos marinos por los rebotes de las ondas sónicas de alta frecuencia. Este principio es usado en medicina. La mejor muestra de esta técnica, desarrollada en Glasgow en los años 60, es el examen de un niño en desarrollo dentro del útero. Con ultrasonido se detecta tumores y se estudia los latidos del corazón en relación con movimientos anormales. Últimamente, con ultrasonido, se puede detectar y medir flujos sanguíneos. Esto se logra por el llamado efecto Doppler. Para comprender este fenómeno basta recordar que el sonido de la bocina de un auto que se acerca es más agudo que cuando se aleja. Como vemos, las ciencias físicas, antes limitadas a laboratorios sofisticados, se han establecido en centros médicos para beneficio de los pacientes. Sólo falta señalar que para el buen uso de este equipamiento es necesario personal constantemente entrenado.

Lectura: Introducción al estudio de la física

La Física es una de las ciencias naturales que más ha contribuido al desarrollo y bienestar del hombre, porque gracias a su estudio e investigación ha sido posible encontrar, en múltiples casos, una explicación clara y útil de los fenómenos que se presentan en nuestra vida diaria.

La palabra **física** se deriva de una palabra griega que significa "conocimiento de la naturaleza". La física intenta describir la naturaleza fundamental del Universo y cómo funciona, esforzándose siempre en proporcionar explicaciones más comunes y sencillas al comportamiento más diverso.

Los acontecimientos del mundo material que son el objeto de estudio de la física se llaman "fenómenos físicos", en el lenguaje científico, la palabra *fenómeno* se aplica a cualquier manifestación de actividad que se produce en la naturaleza, por ejemplo, la física explica por qué los arco iris tienen colores, qué conserva a los satélites en orbitas y de qué están hechos los átomos y núcleos.

La meta de la física es explicar tantas cosas como sea posible, utilizando para ello el menor número de leyes posibles y revelando la belleza y simplicidad de la naturaleza.
Una definición más formal es: La *física* es la ciencia que estudia la energía, sus manifestaciones y transformaciones, y su relación con la materia.

La Física es la ciencia de la medición por excelencia, ya que su amplio desarrollo se debe fundamentalmente a su capacidad de cuantificar las principales características de los fenómenos. Cuando el hombre logra medir un fenómeno, se acerca de manera notable a la comprensión del mismo, y puede utilizar esos conocimientos para mejorar su calidad de vida, facilitando la realización de pequeñas y grandes obras que de otra manera serían imposibles.

Historia de la Física

Desde la antigüedad las personas han tratado de comprender la naturaleza y los fenómenos que en ella se observan: el paso de las estaciones, el movimiento de los cuerpos y de los astros, etc. Las primeras explicaciones se basaron en consideraciones filosóficas y sin realizar verificaciones experimentales, concepto este inexistente en aquel entonces. Por tal motivo algunas interpretaciones "falsas", como la hecha por Ptolomeo - "La Tierra está en el centro del Universo y alrededor de ella giran los astros" - perduraron cientos de años.

- En el Siglo XVI Galileo fue pionero en el uso de experimentos para validar las teorías de la física. Se interesó en el movimiento de los astros y de los cuerpos. Usando el plano inclinado descubrió la ley de la inercia de la dinámica y con el telescopio observó que Júpiter tenía satélites girando a su alrededor.

- En el Siglo XVII Newton (1687) formuló las leyes clásicas de la dinámica (Leyes de Newton) y la Ley de la gravitación universal.

- A partir del Siglo XVIII se produce el desarrollo de otras disciplinas tales como la termodinámica, la mecánica estadística y la mecánica de fluidos.

- En el Siglo XIX se producen avances fundamentales en electricidad y magnetismo. En 1855 Maxwell unificó ambos fenómenos y las respectivas teorías vigentes hasta entonces en la Teoría del electromagnetismo, descrita a través de las Ecuaciones de Maxwell. Una de las predicciones de esta teoría es que la luz es una onda electromagnética. A finales de este siglo se producen los primeros descubrimientos sobre radiactividad dando comienzo el campo de la física nuclear. En 1897 Thompson descubrió el electrón.

- Durante el Siglo XX la Física se desarrolló plenamente. En 1904 se propuso el primer modelo del átomo. En 1905 Einstein formuló la Teoría de la Relatividad especial, la cual coincide con las Leyes de Newton cuando los fenómenos se desarrollan a velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. En 1915 extendió la Teoría de la Relatividad especial formulando la Teoría de la Relatividad general, la cual sustituye a la Ley de gravitación de Newton y la comprende en los casos de masas pequeñas. Planck, Einstein, Bohr y otros desarrollaron la Teoría cuántica a fin de explicar resultados experimentales anómalos sobre la radiación de los cuerpos. En 1911 Rutherford dedujo la existencia de un núcleo atómico cargado positivamente a partir de experiencias de dispersión de partículas. En 1925 Heisenberg y en 1926 Schrödinger y Dirac formularon la Mecánica cuántica, la cual comprende las teorías cuánticas precedentes y suministra las herramientas teóricas para la Física de la materia condensada. Posteriormente se formuló la Teoría cuántica de campos para extender la Mecánica cuántica de manera

consistente con la Teoría de la Relatividad especial, alcanzando su forma moderna a finales de los 40 gracias al trabajo de Feynman, Schwinger, Tomonaga y Dyson, quienes formularon la Teoría de la Electrodinámica cuántica. Asimismo, esta teoría suministró las bases para el desarrollo de la Física de partículas. En 1954 Yang y Mills desarrollaron las bases del Modelo estándar. Este modelo se completó en los años 1970 y con él fue posible predecir las propiedades de partículas no observadas previamente pero que fueron descubiertas sucesivamente siendo la última de ellas el quark top. En la actualidad el modelo estándar describe todas las partículas elementales observadas así como la naturaleza de su interacción.

Ramas de la Física

Para su estudio la física se puede dividir en tres grandes etapas: la Física clásica, la Física moderna y la Física contemporánea. La primera se encarga del estudio de aquellos fenómenos que ocurren a una velocidad relativamente pequeña comparada con la velocidad de la luz en el vacío y cuyas escalas espaciales son muy superiores al tamaño de átomos y moléculas. La segunda se encarga de los fenómenos que se producen a la velocidad de la luz o valores cercanos a ella o cuyas escalas espaciales son del orden del tamaño del átomo o inferiores; fue desarrollada en los inicios del siglo XX.

La tercera se encarga del estudio de los fenómenos no-lineales, de la complejidad de la naturaleza, de los procesos fuera del equilibrio termodinámico y de los fenómenos que ocurren a escalas mesoscópicas y nanoscópicas. Esta área de la física se comenzó a desarrollar hacia finales del siglo XX y principios del siglo XXI.

Dentro del campo de estudio de la Física clásica se encuentran:

- Mecánica: mecánica clásica | mecánica de medios continuos | mecánica de fluidos |Termodinámica y mecánica estadística
- Mecánica ondulatoria: acústica | óptica
- Electromagnetismo: Electricidad | Magnetismo

Dentro del campo de estudio de la Física moderna se encuentran:

- Relatividad: teoría especial de la relatividad | teoría general de la relatividad | Gravitación
- Mecánica cuántica: Átomo | Núcleo | Física química | Física del estado sólido
- Física de partículas

Dentro del campo de estudio de la Física contemporánea se encuentran:

- Termodinámica fuera del equilibrio: Mecánica estadística |Percolación
- Dinámica no-lineal: Turbulencia | Teoría del Caos | Fractales
- Sistemas complejos: Sociofísica | Econofísica | Criticalidad autorganizada | Redes complejas
- Física mesoscópica: Puntos cuánticos
- Nano-Física: Pinzas ópticas

Ciencia y su clasificación

La ciencia (del latín *scientia*, "conocimiento") es un conjunto de métodos y técnicas para la adquisición, refinado y organización de conocimientos sobre la estructura de un conjunto de hechos objetivos y accesibles a varios observadores. La aplicación de esos métodos y conocimientos conduce a la generación de más conocimiento objetivo en forma de predicciones concretas, cuantitativas y comprobables referidas a hechos observables pasados, presentes y futuros. Con frecuencia esas predicciones pueden ser formuladas mediante razonamientos y son estructurables en forma de reglas o leyes universales, que dan cuenta del comportamiento de un sistema y predicen cómo actuará dicho sistema en determinadas circunstancias.

Dentro de las ciencias, la ciencia experimental se ocupa exclusivamente del estudio del universo natural ya que, por definición, todo lo que puede ser detectado o medido forma parte de él. En su investigación los científicos se ajustan a un cierto método, el método científico, un proceso para la adquisición de conocimiento empírico. A su vez, la ciencia puede diferenciarse en ciencia básica y aplicada, siendo esta última la aplicación del conocimiento científico a las necesidades humanas y al desarrollo tecnológico.

Algunos descubrimientos científicos pueden resultar contraintuitivos, es decir, contrarios al sentido común. Ejemplos de esto son la teoría atómica o la mecánica cuántica, que desafían nociones comunes sobre la materia. Muchas concepciones intuitivas de la naturaleza han sido transformadas a partir de hallazgos científicos, como el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol o la teoría evolutiva de Charles Darwin.

Disciplinas científicas

Esquema de clasificación planteado por el epistemólogo alemán Rudolf Carnap quien fue el primero en dividir a la ciencia en:		
Ciencias formales		Por contraposición a las ciencias fácticas, son aquellas que no estudian fenómenos empíricos. Utilizan la deducción como método de búsqueda de la verdad: Lógica - Matemática.
Ciencias factuales	Ciencias naturales	En ellas se encuadran las ciencias naturales que tienen por objeto el estudio de la naturaleza. Siguen el método científico: Astronomía - Biología - Física - Química - Geología.
	Ciencias sociales	Son todas las disciplinas que se ocupan de los aspectos del ser humano - cultura y sociedad- El método depende de cada disciplina particular: Antropología - Demografía- Economía - Historia - Psicología - Sociología.

Terminologías usadas en ciencias

Los términos modelo, hipótesis, ley y teoría tienen significados distintos en la ciencia que en el discurso coloquial. Los científicos utilizan el término *modelo* para referirse a una descripción de algo, especialmente una que pueda ser usada para realizar predicciones que puedan ser sometidas a prueba por experimentación u observación. Una *hipótesis* es una afirmación que (aun) no ha sido bien respaldada o bien no ha sido descartada. Una *ley física* o *ley natural* es una generalización científica basada en observaciones empíricas.

La palabra *teoría* es incomprendida particularmente por el común de la gente. El uso vulgar de la palabra "teoría" se refiere, equivocadamente, a ideas que no poseen demostraciones firmes o respaldo. En contraposición, los científicos generalmente utilizan esta palabra para referirse a cuerpos de leyes que realizan predicciones acerca de fenómenos específicos.

Aplicaciones de la matemática en las ciencias

La matemática es esencial para muchas ciencias. La función más importante de la matemática dentro de la ciencia la desempeña en la expresión de modelos científicos. La observación y colección de medidas, así como la creación de hipótesis y la predicción a menudo requieren modelos matemáticos y uso extensivo de la matemática. Las ramas de la matemática más comúnmente empleadas en la ciencia incluyen al cálculo y las estadísticas, aunque virtualmente toda rama de la matemática tiene aplicaciones en la ciencia, aun áreas "puras" como la teoría de números y la topología. El uso de matemática es particularmente frecuente en física, y en menor medida en química, biología y algunas ciencias sociales.

El término razonamiento se define de diferente manera según el contexto, normalmente se refiere a un conjunto de actividades mentales consistentes en conectar unas ideas con otras de acuerdo a ciertas reglas o también puede referirse al estudio de ese proceso. En sentido amplio, se entiende por *razonamiento* la facultad humana que permite resolver problemas.

Se llama también razonamiento al resultado de la actividad mental de razonar, es decir, un conjunto de proposiciones enlazadas entre sí que dan apoyo o justifican una idea. El razonamiento se corresponde con la actividad verbal de argumentar. En otras palabras, un argumento es la expresión verbal de un razonamiento.

El *razonamiento lógico* se refiere al uso de entendimiento para pasar de unas proposiciones a otras, partiendo de lo ya conocido o de lo que creemos conocer a lo desconocido o menos conocido. Se distingue entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo.

En un *razonamiento deductivo válido*, la conclusión debe derivarse necesariamente de las premisas. Esto quiere decir que, si las premisas del razonamiento son verdaderas, la conclusión ha de ser verdadera. El pensamiento deductivo parte de categorías generales para hacer afirmaciones sobre casos particulares. *Va de lo general a lo particular*. Es una forma de razonamiento donde se infiere una conclusión a partir de una o varias premisas.

El *razonamiento inductivo* es una modalidad del razonamiento no deductivo que consiste en obtener conclusiones generales a partir de premisas que contienen datos particulares. Por ejemplo, de la observación repetida de objetos o acontecimientos de la misma índole se establece una conclusión para todos los objetos o eventos de dicha naturaleza.

Influencia de la ciencia

en la sociedad

Dado el carácter universal de la ciencia, su influencia se extiende a todos los campos de la sociedad. Desde el desarrollo tecnológico a los modernos problemas de tipo jurídico relacionados con campos de la medicina o la genética. En ocasiones la investigación científica permite abordar temas de gran calado social como el Proyecto Genoma Humano y de implicaciones morales como el desarrollo del armamento nuclear.

Asimismo la investigación científica moderna requiere en ocasiones de importantes inversiones en grandes instalaciones como grandes aceleradores de partículas (CERN), la exploración espacial, o la investigación de la fusión nuclear en proyectos como ITER. En todos estos casos es deseable que los logros científicos conseguidos lleguen a la sociedad.

El término *tecnología* es una palabra compuesta de origen griego, τεχνολογος, formado por las palabras *tekne* (τεχνη, "arte, técnica u oficio") y *logos* (λογος, "conocimiento" o "ciencia"), por tanto, tecnología es el estudio o ciencia de los oficios.

Aunque hay muchas tecnologías muy diferentes entre sí, es frecuente usar el término en singular para referirse a una cualquiera de ellas o al conjunto de todas. Cuando se lo escribe con mayúscula, Tecnología puede referirse tanto a la disciplina teórica que estudia los saberes comunes a todas las tecnologías, como a la Educación Tecnológica, disciplina escolar abocada a la familiarización con las tecnologías más importantes.

Función de la tecnología

Históricamente las tecnologías han sido usadas para satisfacer necesidades esenciales (alimentación, vestimenta, vivienda, protección personal, relación social, comprensión del mundo natural y social), para obtener placeres corporales y estéticos (deportes, música, hedonismo en todas sus formas) y como medios para satisfacer deseos (simbolización de estatus, fabricación de armas y toda la gama de medios artificiales usados para persuadir y dominar a las personas).

A pesar de lo que afirmaban los ludditas, y como el propio Marx señalara refiriéndose específicamente a las maquinarias industriales, las tecnologías no son ni buenas ni malas. Los ***juicios éticos*** no son aplicables a las tecnologías, sino al uso que hacemos de ellas: un arma puede usarse para matar a una persona y apropiarse de sus bienes o para salvar la vida matando un animal salvaje que quiere convertirnos en su merienda.

Diferencia entre tecnología, técnica, ciencia, y arte

Tanto en el habla cotidiana como en los tratados técnicos es difícil establecer una diferencia entre tecnologías y técnicas. Las tecnologías simples tienden a ser llamadas técnicas (por ejemplo, la técnica de colocación de clavos). Las tecnologías complejas usan muchas tecnologías preexistentes y más simples; es decir, hay una amplia graduación de complejidad en uno de cuyos extremos están las tecnologías más complejas, como las electrónicas y las médicas, y en el otro las técnicas, generalmente manuales y artesanales. Asimismo, las tecnologías tienden a ser más racionales y transmisibles con mayor precisión (generalmente a través de textos, gráficos, tablas y representaciones varias y complejas) que las técnicas, usualmente más empíricas que racionales.

Algunas de las tecnologías actuales más importantes, como la Electrónica, consisten en la aplicación práctica de las ciencias (en ese caso el Electromagnetismo y la Física del estado sólido). Sin embargo, no todas las tecnologías son ciencias aplicadas. Tecnologías como la Agricultura y la Ganadería precedieron a las ciencias biológicas en miles de años, y se desarrollaron de modo empírico, por ensayo y error (y por ello con lentitud y dificultad), sin necesidad de saberes científicos. La función central de las ciencias es descubrir la verdad, aunque no sea visible o vaya contra el "sentido común": describir y categorizar los fenómenos, explicarlos en base a leyes o principios lo más simples posibles y tal vez (no siempre) predecirlos.

Las artes, por su parte, requieren de técnicas para su realización (por ejemplo: preparación de pigmentos y su modo de aplicación en la pintura; fabricación de cinceles y martillos y modo de fundir el bronce o tallar el mármol, en la escultura).
Una diferencia central es que las técnicas son transmisibles, es decir, pueden ser enseñadas por un maestro y aprendidas por un aprendiz. Las artes, al menos en su expresión más lograda, en general no lo son. Decimos que algo es "un arte" cuando su realización requiere dotes especiales que no podemos especificar con precisión.

Una diferencia importante entre artes, ciencias y tecnologías o técnicas, es su finalidad. La ciencia busca la verdad (buena correspondencia entre la realidad y las ideas que nos hacemos de ella). Las artes buscan el placer que da la expresión y evocación de los

sentimientos humanos, la belleza de la formas, los sonidos y los conceptos; el placer intelectual. Las tecnologías son medios para satisfacer las necesidades y deseos humanos. Son funcionales, permiten resolver problemas prácticos y en el proceso de hacerlo, transforman el mundo que nos rodea haciéndolo más previsible, crecientemente artificial y provocando al mismo tiempo grandes consecuencias sociales y ambientales, en general no igualmente deseables para todos los afectados.

Las tecnologías no sólo tienen finalidades diferentes que las ciencias, también tienen métodos propios distintos del método científico, aunque la experimentación es común a ambas. Con relación a la realidad, se puede decir que las ciencias realizan el deseo de las personas de comprenderla, las artes su necesidad de disfrutarla mentalmente, mientras que las técnicas y las tecnologías se proponen transformarla.

Método científico

El Método científico, es un método de estudio sistemático de la naturaleza que incluye las técnicas de observación, reglas para el razonamiento y la predicción, ideas sobre la experimentación planificada y los modos de comunicar los resultados experimentales y teóricos. Es el proceso mediante el cual una teoría científica es validada o bien descartada.

Existe una serie de pasos inherentes al proceso científico, los cuales son generalmente respetados en la construcción y desarrollo de nuevas teorías. Éstos son:

La **Observación** consiste en el estudio de un fenómeno que se produce en sus condiciones naturales. La observación debe ser cuidadosa, exhaustiva y exacta.

A partir de la observación surge el planteamiento del problema que se va a estudiar, lo que lleva a emitir alguna **hipótesis** o suposición provisional de la que se intenta extraer una consecuencia. Existen ciertas pautas que han demostrado ser de utilidad en el establecimiento de las hipótesis y de los resultados que se basan en ellas; estas pautas son: probar primero las hipótesis más simples, no considerar una hipótesis como totalmente cierta y realizar pruebas experimentales independientes antes de aceptar un único resultado experimental importante.

La **experimentación** consiste en el estudio de un fenómeno, reproducido generalmente en un laboratorio, en las condiciones particulares de estudio que interesan, eliminando o introduciendo aquellas variables que puedan influir en él.

Se entiende por ***variable*** todo aquello que pueda causar cambios en los resultados de un experimento y se distingue entre variable independiente, dependiente y controlada.

Variable independiente es aquélla que el experimentador modifica a voluntad para averiguar si sus modificaciones provocan o no cambios en las otras variables. ***Variable dependiente*** es la que toma valores diferentes en función de las modificaciones que sufre la variable independiente. *Variable controlada* es la que se mantiene constante durante todo el experimento.

En un experimento siempre existe un control o un testigo, que es una parte del mismo no sometido a modificaciones y que se utiliza para comprobar los cambios que se producen.

Todo experimento debe ser reproducible, es decir, debe estar planteado y descrito de forma que pueda repetirlo cualquier experimentador que disponga del material adecuado.

Los **resultados** de un experimento pueden describirse mediante tablas, gráficos y ecuaciones de manera que puedan ser analizados con facilidad y permitan encontrar relaciones entre ellos que confirmen o no las hipótesis emitidas.

Una hipótesis confirmada se puede transformar en una **ley científica** que establezca una relación entre dos o más variables, y al estudiar un conjunto de leyes se pueden hallar algunas regularidades entre ellas que den lugar a unos principios generales con los cuales se constituya una **teoría**.

Según algunos investigadores, el método científico es el modo de llegar a elaborar teorías, entendiendo éstas como configuración de leyes. Mediante la *inducción* se obtiene una ley a partir de las observaciones y medidas de los fenómenos naturales, y mediante la *deducción* se obtienen consecuencias lógicas de una teoría. Por esto, para que una teoría científica sea admisible debe relacionar de manera razonable muchos hechos en apariencia independientes en una estructura mental coherente. Así mismo debe permitir hacer predicciones de nuevas relaciones y fenómenos que se puedan comprobar experimentalmente.

Las leyes y las teorías encierran a menudo una pretensión realista que conlleva la noción de **modelo**;

éste es una abstracción mental que se utiliza para poder explicar algunos fenómenos y para reconstruir por aproximación los rasgos del objeto considerado en la investigación.

La experimentación no es aplicable a todas las ramas de la ciencia; su exigencia no es necesaria por lo general en áreas del conocimiento como la vulcanología, la astronomía, la física teórica, etc. Sin embargo, la *reproducibilidad* entendida como la capacidad de repetir un determinado experimento en cualquier lugar y por cualquier persona, es un requisito fundamental de toda ciencia.

Por otra parte, existen ciencias, especialmente en el caso de las ciencias humanas y sociales, donde los fenómenos no sólo no se pueden repetir controlada y artificialmente (que es en lo que consiste un experimento), sino que son, por su esencia, irrepetibles, por ejemplo, la historia. De forma que el concepto de método científico aplicado a estas ciencias habría de ser repensado, acercándose más a una definición como la siguiente: "*proceso de conocimiento caracterizado por el uso constante e irrestricto de la capacidad crítica de la razón, que busca establecer la explicación de un fenómeno ateniéndose a lo previamente conocido, resultando una explicación plenamente congruente con los datos de la observación*".

Lectura: ¿Es importante la conversión de Unidades?

La respuesta a esta pregunta es "¡Ya lo creo!" Veamos un par de casos ilustrativos.



En 1999, la sonda Mars Climate Orbiter hizo un viaje al Planeta Rojo para investigar su atmósfera. La nave espacial se aproximó a Marte en septiembre, pero de pronto se perdió el contacto entre la sonda y el personal en la Tierra, y no se volvió a recibir señal de Mars. Las investigaciones demostraron que la sonda se había aproximado a Marte a una altitud mucho más baja de la planeada. En vez de pasar a ***87 millas*** por encima de la superficie marciana, los datos recabados indicaron que Mars seguía una trayectoria que la llevaría a tan sólo ***35 millas*** de la superficie. Como resultado, la nave espacial se quemó en la atmosfera de Marte o chocó contra la superficie.

¿Cómo pudo suceder esto? Las investigaciones indican que el fracaso del Orbite se debió primordialmente a un problema con la conversión de unidades. En Lockheed Martin Astronautics, donde se construyó la nave espacial, los ingenieros calcularon la información de la navegación en unidades inglesas. Cuando los científicos del Laboratorio de Propulsión de la NASA recibieron los datos, supusieron que la información estaba en unidades métricas, como se pedía en las especificaciones de la misión. No se hizo la conversión de unidades, y una nave espacial de 125 millones de dólares se perdió en el Planeta Rojo, lo que provocó la vergüenza de muchas personas.

Más cerca de la Tierra, en 1983, el vuelo 143 de Air Canadá seguía su trayecto de Montreal a Edmonton, Canadá, con 61 pasajeros a bordo de un Boeing 767, el avión más avanzado del mundo para entonces.

Casi a la mitad del vuelo, una luz de advertencia se encendió para una de las bombas de combustible, luego para otra, y finalmente paran las cuatro bombas. Los motores se detuvieron y entonces este avanzado avión se volvió un planeador, cuando estaba a unas ***100 millas*** del aeropuerto más cercano, en Winnipeg. Sin los motores funcionando, el avión del vuelo 143 se había precipitado a ***10 millas*** del aeropuerto, así que fue desviado a un viejo campo de aterrizaje de la Real Fuerza Aérea Canadiense, en Gimli. El piloto maniobró el avión sin potencia para el aterrizaje, deteniéndose a corta distancia de una barrera. ¿Acaso el avión apodado "el planeador de Gimli" tenía bombas de combustible en mal estado? No, *¡Se quedó sin combustible!*

Este reciente desastre fue provocado por otro problema de conversión. Las computadoras del combustible no funcionaban adecuadamente, así que los mecánicos utilizaron el antiguo procedimiento de medir el combustible en los tanques con una varilla de medición. La longitud de la varilla que se moja permite determinar el volumen de combustible por medio de valores en las tablas de conversión. Air Canadá, durante años, había calculado la cantidad de combustible en libras; mientras que el consumo de combustible del 767 se expresaba en kilogramos. Y algo aún peor, el procedimiento de la varilla de medición daba la cantidad del combustible a bordo en litros, y no en libras o en kilogramos. El resultado fue que la aeronave se cargo con ***22 300 lb*** de combustible en vez de los ***22 300 kg*** que se requerían. Como 1 lb tiene una masa de 0.45 kg, el avión llevaba menos de la mitad del combustible necesario.

Estos incidentes destacan la importancia de emplear las unidades adecuadas, de efectuar correctamente las conversiones de unidades y de trabajar consistentemente con un mismo sistema de unidades.

Texto extraído del libro Física de Wilson-Buffa-Lou. Sexta edición. Pág. 16

Actividad:

Convertir los datos de la lectura al Sistema Internacional (SI).

Lectura: Mediciones y Sistemas de Unidades

Para la física y la química, en su calidad de ciencias experimentales, la medida constituye una operación fundamental. Sus descripciones del mundo físico se refieren a magnitudes o propiedades medibles. Las unidades, como cantidades de referencia a efectos de comparación, forman parte de los resultados de las medidas. Cada dato experimental se acompaña de su error o, al menos, se escriben sus cifras de tal modo que reflejen la precisión de la correspondiente medida.

Se consideran ciencias experimentales aquellas que por sus características y, particularmente por el tipo de problemas de los que se ocupan, pueden someter sus afirmaciones o enunciados al juicio de la experimentación. En un sentido científico la experimentación hace alusión a una observación controlada; en otros términos, experimentar es reproducir en el laboratorio el fenómeno en estudio con la posibilidad de variar a voluntad y de forma precisa las condiciones de observación.

La historia de ambas disciplinas, pone de manifiesto que la experimentación ha desempeñado un doble papel en su desarrollo. Con frecuencia, los experimentos científicos sólo pueden ser entendidos en el marco de una teoría que orienta y dirige al investigador sobre qué es lo que hay que buscar y sobre qué hipótesis deberán ser contrastadas experimentalmente. Pero, en ocasiones, los resultados de los experimentos generan información que sirve de base para una elaboración teórica posterior. Este doble papel de la experimentación como juez y guía del trabajo científico se apoya en la realización de medidas que facilitan una descripción de los fenómenos en términos de cantidad. La medida constituye entonces una operación clave en las ciencias experimentales.

El gran físico inglés Kelvin consideraba que solamente puede aceptarse como satisfactorio nuestro conocimiento si somos capaces de expresarlo mediante números. Aun cuando la afirmación de Kelvin tomada al pie de la letra supondría la descalificación de valiosas formas de conocimiento, destaca la importancia del conocimiento cuantitativo. La operación que permite expresar una propiedad o atributo físico en forma numérica es precisamente la medida.

Magnitud, cantidad y unidad

La noción de magnitud está inevitablemente relacionada con la de medida. Se denominan magnitudes a ciertas propiedades o aspectos observables de un sistema físico que pueden ser expresados en forma numérica. En otros términos, *las magnitudes son propiedades o atributos medibles.*

La longitud, la masa, el volumen, la fuerza, la velocidad, la cantidad de sustancia son ejemplos de magnitudes físicas. La belleza, sin embargo, no es una magnitud, entre otras razones porque no es posible elaborar una escala y mucho menos un aparato que permita determinar cuántas veces una persona o un objeto es más bello que otro. La sinceridad o la amabilidad tampoco lo son. Se trata de aspectos cualitativos porque indican cualidad y no cantidad.
La observación de un fenómeno es en general, incompleta a menos que dé lugar a una información cuantitativa. Para obtener dicha información, se requiere la medición de una propiedad física. Así, la medición constituye una buena parte de la rutina diaria del físico experimental.

En el lenguaje de la física la noción de cantidad se refiere al valor que toma una magnitud dada en un cuerpo o sistema concreto; la longitud de una mesa, la masa de una moneda, el volumen de una canica, son ejemplos de cantidades. Una cantidad de referencia se denomina unidad y el sistema físico que encarna la cantidad considerada como una unidad se denomina patrón.

La medida como comparación

La medición es la técnica por medio de la cual asignamos un número a una propiedad física, como resultado de una comparación de dicha propiedad con otra similar tomada como patrón, la cual se ha adoptado como unidad.

La medida de longitudes se efectuaba en la antigüedad empleando una vara como patrón, es decir, determinando cuántas veces la longitud del objeto a medir contenía a la del patrón. La vara, como predecesora del metro de sastre, ha pasado a la historia como una unidad de medida equivalente a 835,9 mm. Este tipo de comparación inmediata de objetos corresponde a las llamadas medidas directas.

Con frecuencia, la comparación se efectúa entre atributos que, aun cuando están relacionados con lo que se desea medir, son de diferente naturaleza. Tal es el caso de las medidas térmicas, en las que comparando longitudes sobre la escala graduada de

un termómetro se determinan temperaturas. Esta otra clase de medidas se denominan indirectas.

Tipos de magnitudes

Entre las distintas propiedades medibles puede establecerse una clasificación básica. Un grupo importante de ellas quedan perfectamente determinadas cuando se expresa su cantidad mediante un número seguido de la unidad correspondiente. Este tipo de magnitudes reciben el nombre de magnitudes escalares. La longitud, el volumen, la masa, la temperatura, la energía, son sólo algunos ejemplos. Sin embargo, existen otras que precisan para su total definición que se especifique, además de los elementos anteriores, una dirección o una recta de acción y un sentido: son las llamadas magnitudes vectoriales o dirigidas. La fuerza es un ejemplo claro de magnitud vectorial, pues sus efectos al actuar sobre un cuerpo dependerán no sólo de su cantidad, sino también de la línea a lo largo de la cual se ejerza su acción.

Al igual que los números reales son utilizados para representar cantidades escalares, las cantidades vectoriales requieren el empleo de otros elementos matemáticos diferentes de los números, con mayor capacidad de descripción. Estos elementos matemáticos que pueden representar modulo, dirección y sentido se denominan vectores. Las magnitudes que se manejan en la vida diaria son, por lo general, escalares. El dependiente de una tienda departamental, el comerciante o incluso el contable, manejan masas, precios, volúmenes, etc., y por ello les es suficiente saber operar bien con números. Sin embargo, el físico, y en la medida correspondiente el estudiante de física, al tener que manejar magnitudes vectoriales, ha de operar, además, con vectores.

Sistemas de unidades

En las ciencias físicas tanto las leyes como las definiciones relacionan matemáticamente entre sí grupos, por lo general amplios, de magnitudes. Por ello es posible seleccionar un conjunto reducido pero completo de ellas de tal modo que cualquier otra magnitud pueda ser expresada en función de dicho conjunto. Esas pocas magnitudes relacionadas se denominan *magnitudes fundamentales*, mientras que el resto que pueden expresarse en función de las fundamentales reciben el nombre de *magnitudes derivadas*.

Cuando se ha elegido ese conjunto reducido y completo de magnitudes fundamentales y se han definido correctamente sus unidades correspondientes, se dispone entonces de un sistema de unidades. La definición de unidades dentro de un sistema se atiene a diferentes criterios. Así la unidad ha de ser constante como corresponde a su función de cantidad de referencia equivalente para las diferentes mediciones, pero también ha de ser reproducible con relativa facilidad en un laboratorio.

Por ejemplo, la definición de amperio como unidad de intensidad de corriente ha evolucionado sobre la base de este criterio. Debido a que las fuerzas se saben medir con bastante precisión y facilidad, en la actualidad se define el amperio a partir de un fenómeno electromagnético en el que aparecen fuerzas entre conductores cuya magnitud depende de la intensidad de corriente.

El primer sistema de unidades bien definido que hubo en el mundo fue el **Sistema Métrico Decimal**, implantado en 1795 como resultado de la Convención Mundial de Ciencias celebrada en Paris, Francia; este sistema tiene una división decimal y sus unidades fundamentales son: el metro, el kilogramo-peso y el litro. Además, para definir las unidades fundamentales utiliza datos de carácter general, como las dimensiones de la Tierra y la densidad del agua.

En 1881, como resultado del gran desarrollo de la ciencia y por supuesto de la Física, se adopta en el Congreso Internacional de los Electricistas, realizado en Paris, Francia, un sistema llamado absoluto: el **Sistema Cegesimal o cgs** propuesto por el físico alemán Karl Gauss. En dicho sistema las magnitudes fundamentales y las unidades propuestas para las mismas son: para la longitud el centímetro, para la masa el gramo y para el tiempo el segundo.

En ese entonces ya se observaba la diferenciación entre los conceptos de masa y peso de un cuerpo, porque se tenía claro que el peso era el resultado de la fuerza de atracción gravitacional ejercida por la Tierra sobre la masa de los cuerpos.

En 1935, en el Congreso Internacional de los Electricistas celebrado en Brúcelas, Bélgica, el ingeniero italiano Giovanni Giorgio propone y logra que se acepte su sistema, también llamado absoluto, pues como magnitud fundamental se habla de la masa y no del peso de los cuerpos; este sistema recibe el nombre de **mks**, cuyas iniciales corresponden al metro, al kilogramo y al segundo como unidades de longitud, masa y tiempo, respectivamente.

Actualmente, aún se utiliza, sobre todo en Estados Unidos, el **Sistema Inglés** (pie, libra y segundo) y el **Sistema cgs**; además de los llamados Sistemas

Gravitacionales, Técnicos o de Ingeniería que en lugar de la masa se refieren al peso como unidad fundamental. Por ejemplo, es muy común expresar nuestro peso en kilogramos fuerza (kg_f), en lugar de expresarlo en newtons (N). En las estaciones de servicio, la presión de las llantas se mide en libras fuerza por pulgada cuadrada ($lb_f/pulg^2$) en lugar de newtons por metro cuadrado (N/m^2).

Sistema Internacional de Unidades (SI)

En virtud de que en el mundo científico se buscaba uniformidad en un solo sistema de unidades que resultara práctico, claro y acorde con los avances de la ciencia, en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1960, científicos y técnicos de todo el mundo se reunieron en Ginebra, Suiza y acordaron adoptar el el llamado con anterioridad Sistema Práctico de Unidades, como Sistema Internacional (SI), que es, precisamente, como se le conoce a partir de entonces.

Este sistema se basa en el llamado mks, cuyas iniciales corresponden a metro, kilogramo y segundo. El SI establece siete magnitudes fundamentales (longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura absoluta, intensidad luminosa y cantidad de sustancia), y fija las correspondientes unidades para cada una de ellas, (metro, kilogramo, segundo, ampere, Kelvin, candela y mol). De estas siete unidades se definen las unidades derivadas (coulomb, joule, newton, pascal, volt, ohm, etc.), además de otras suplementarias asociadas a medidas angulares (ángulo plano y ángulo sólido).

La definición de las diferentes unidades fundamentales ha evolucionado con el tiempo al mismo ritmo que las propias ciencias físicas. Así, el segundo se definió inicialmente como 1/86 400 la duración del día solar medio, esto es, promediado a lo largo de un año.

Un día normal tiene 24 h aproximadamente, es decir, 86 400 s; no obstante, esto tan sólo es aproximado, pues la duración del día varía a lo largo del año en algunos segundos, de ahí que se tome como referencia la duración promediada del día solar. Pero debido a que el periodo de rotación de la Tierra puede variar, y de hecho varía, se ha acudido al átomo para buscar en él un periodo de tiempo fijo al cual referir la definición de su unidad fundamental.

Las definiciones más recientes de las magnitudes fundamentales son:

Tabla 1: Magnitudes fundamentales del Sistema Internacional (SI)					
Magnitud	**Símbolo**	**Unidad**	**Símbolo**	**Dimensión**	**Definición**
longitud	*l*	metro	m	**L**	Distancia que recorre en el vacío la luz en 1/299 792 458 de segundo
masa	*m*	kilogramo	kg	**M**	Masa del prototipo internacional
tiempo	*t*	segundo	s	**T**	Duración de 9 192 631 770 oscilaciones de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133
corriente eléctrica	I	ampere	A		Intensidad de una corriente constante que produciría una fuerza de 2×10^{-7} newton por metro de longitud entre dos alambres rectilíneos paralelos de longitud infinita y sección circular despreciable puestos a una distancia de un metro uno del otro en el vacío (iuf!)
temperatura	T	kelvin	K		Fracción 1/273.16 de la temperatura del punto triple del agua
cantidad de sustancia	*n*	mol	mol		1. Cantidad de materia de un sistema compuesto de tantas entidades elementales como átomos hay en 0.012 kilogramos de carbono 12 2. Cuando se emplea el mol hay que especificar las entidades elementales: átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o grupos específicos de tales partículas
intensidad luminosa	I_v	candela	cd		Intensidad luminosa en una dirección dada de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y cuya intensidad energética en esa dirección es igual a 1/683 de watt por esterradián

Magnitudes derivadas

Las unidades derivadas se forman con la combinación de unidades base u otras derivadas para expresar unidades de otras magnitudes de acuerdo con la ecuación algebraica que las relaciona.

Por ejemplo, la unidad de la velocidad se obtiene de considerar la ecuación que la define ($v = \frac{s}{t}$), sustituyendo en ella las unidades respectivas, la unidad de la velocidad es el $\frac{m}{s}$.

Tabla 2: Magnitudes derivadas del SI					
Magnitud	Unidad	Símbolo	Expresadas en términos de otras unidades del SI	Expresadas en términos de las unidades base del SI	Dimensión
fuerza	newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	LMT^{-2}
presión, esfuerzo	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	$L^{-1}MT^{-2}$
energía, trabajo, calor	joule	J	N.m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	L^2MT^{-2}
potencia, flujo de energía	watt	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	L^2MT^{-3}
frecuencia	hertz	Hz		s^{-1}	T^{-1}
carga eléctrica, cantidad de electricidad	coulomb	C		s.A	
diferencia de potencial eléctrico, fuerza electromotriz	volt	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	
capacitancia	farad	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$	
resistencia eléctrica	ohm	W	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	
conductancia eléctrica	siemens	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	
flujo magnético	weber	Wb	V.s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	
densidad de flujo magnético	tesla	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-1} \cdot A^{-1}$	
inductancia	henry	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	
temperatura Celsius	Celsius	°C		K	
flujo luminoso	lumen	lm	cd.sr	$m^2 \cdot m^2 \cdot cd = cd$	
radiación luminosa	lux	lx	lm/m^2	$m^2 \cdot m^{-4} \cdot cd = m^{-2} \cdot cd$	
actividad (radiación ionizante)	becquerel	Bq		s^{-1}	
dosis absorbida, energía específica (transmitida)	gray	Gy	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$	
dosis equivalente	sievert	Sv	J/kg	$m^2 \cdot s^{-2}$	

Algunas unidades derivadas reciben nombres y símbolos especiales para expresar unidades de uso frecuente.

Tabla 3: Unidades que reciben nombres especiales en el SI		
Unidad	Símbolo	Definición
newton	**N**	Es la fuerza que, aplicada a un cuerpo que tiene una masa de 1 kilogramo, le comunica una aceleración de 1 metro por segundo, cada segundo.
pascal	**Pa**	Unidad de presión. Es la presión uniforme que, actuando sobre una superficie plana de 1 metro cuadrado, ejerce perpendicularmente a esta superficie una fuerza total de 1 newton.
joule	**J**	Trabajo producido por una fuerza de un newton cuando su punto de aplicación se desplaza la distancia de un metro en la dirección de la fuerza.
watt	**W**	Potencia que da lugar a una producción de energía igual a 1 joule por segundo.
hertz	**Hz**	Numero de ondas emitidas por el centro emisor en un segundo.
coulomb	**C**	Cantidad de electricidad transportada en un segundo por una corriente de un amperio.
volt	**V**	Unidad de tensión eléctrica, potencial eléctrico, fuerza electromotriz. Es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un hilo conductor que transporta una corriente de intensidad constante de 1 ampere cuando la potencia disipada entre esos puntos es igual a 1 watt.

ohm	Ω	Unidad de resistencia eléctrica. Es la resistencia eléctrica que existe entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia de potencial constante de 1 volt aplicada entre estos dos puntos produce, en dicho conductor, una corriente de intensidad 1 ampere, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor.
weber	**Wb**	Unidad de flujo magnético, flujo de inducción magnética. Es el flujo magnético que, al atravesar un circuito de una sola espira produce en la misma una fuerza electromotriz de 1 volt si se anula dicho flujo en 1 segundo por decrecimiento uniforme.

Unidades complementarias

El comité Internacional de Pesas y Medidas ha admitido la necesidad de mantener en uso algunas unidades que no pertenecen al Sistema Internacional de Unidades y que, sin embargo, se utilizan ampliamente; entre otras están las unidades de tiempo como el minuto, la hora, el día, así como el electrón-volt para la energía.

Tabla 4: Unidades complementarias

Magnitud	Unidad	Símbolo
tiempo	minuto hora día semana mes, etc.	min h d
ángulo plano	grado sexagesimal	° (exponente)
temperatura	grado celsius	°C
volumen	litro	*l*
masa	tonelada	t

Prefijos

Mediante el empleo de prefijos y sus respectivos símbolos, aceptados internacionalmente, podemos obtener múltiplos y submúltiplos para las diferentes unidades de medida.

Tabla 5: Prefijos usados para el Sistema Internacional (SI)

Factor	Símbolo	Prefijo		Símbolo	Factor
		múltiplo	submúltiplo		
(diez) 1x10	da	deca	deci	d	$1x10^{-1}$ (un décimo)
(cien) $1x10^{2}$	h	hecto	centi	c	$1x10^{-2}$ (un centésimo)
(mil) $1x10^{3}$	k	kilo	mili	m	$1x10^{-3}$ (un milésimo)
(diez mil) $1x10^{4}$	ma	miria			
(un millón) $1x10^{6}$	M	mega	micro	μ	$1x10^{-6}$ (un millonésimo)
(mil millones) $1x10^{9}$	G	giga	nano	n	$1x10^{-9}$ (un milmillonésimo)
(un billón) $1x10^{12}$	T	tera	pico	p	$1x10^{-12}$ (un billonésimo)
(mil billones) $1x10^{15}$	P	peta	femto	f	$1x10^{-15}$ (un milbillonésimo)
(un trillón) $1x10^{18}$	E	exa	atto	a	$1x10^{-18}$ (un trillonésimo)
(mil trillones) $1x10^{21}$	Z	zetta	zepto	z	$1x10^{-21}$ (un miltrillonésimo)
(un cuatrillón) $1x10^{24}$	Y	yotta	yocto	y	$1x10^{-24}$ (un cuatrillonésimo)

Reglas y recomendaciones para la escritura de las unidades del SI

Junto con las definiciones de las unidades de SI se emitieron ciertas recomendaciones tendientes a unificar en forma universal la escritura de dichas unidades, sus símbolos y otros conceptos relacionados. A continuación se dan a conocer algunas:

1. Los símbolos de las unidades deberán ser escritos con letras verticales o letras romanas derechas.

2. Los símbolos de las unidades nunca se escribirán en plural, siempre en singular, es decir kg y no kgs.

3. Deberán usarse los símbolos y no abreviaciones de los mismos. Ejemplo; para metro deberá escribirse m y no mts.

4. El símbolo de una unidad no será seguido de un punto, excepto cuando se coloque al final de una frase

5. En general, los símbolos de las unidades se escribirán con letras minúsculas, excepto el ohm Ω y los que provienen de un nombre propio, en cuyo caso se escribirán en mayúsculas. Por ejemplo, el símbolo de la unidad de la fuerza, el newton se representa por N, ya que proviene de un nombre propio. Pero la unidad del metro se simboliza con una letra minúscula, la m, pues dicho termino no proviene de ningún nombre propio.

6. Cuando se usan prefijos el símbolo de la unidad se escribe después del prefijo y sin espacio, por ejemplo: dm, cm, μA, ns, etcétera.

7. Cuando una cantidad se expresa con un valor numérico y un símbolo, la unidad va siempre después del número y con un espacio entre ellos. Por ejemplo: 1,60 m es la forma correcta de escribir esta cantidad y no 1m 60.

8. Al escribir los nombres completos de las unidades que se obtienen de un producto, se deberá dejar espacio entre las dos, o bien poner un guion o punto entre ambas unidades. Por ejemplo, la unidad de impulso deberá escribirse newton segundo N s, newton-segundo N-s o newton segundo N·s.

9. Para el caso de las unidades que se obtienen de un cociente, deberá emplearse la palabra por (o sobre) en vez de un quebrado. Por ejemplo, la unidad de la velocidad deberá escribirse metro por segundo o metro sobre segundo y no como metro/segundo. El símbolo de la unidad sería m/s o ms^{-1}.

10. Para evitar confusiones en expresiones complicadas es preferible emplear los símbolos que las palabras completas.

11. No deberá mezclarse en una expresión los nombres y los símbolos de las unidades.

12. Cuando se escriban números menores que la unidad, se pondrá un cero y un punto antes del número. Ejemplos: 0.042 cm, 0.8 kg, etcétera.

13. En una cantidad para marcar los decimales deberá usarse la coma en la misma línea. Es decir, que la cantidad 46,32 cm es la forma correcta y no 46.32 cm.

Otros datos útiles en física:

1. Alfabeto griego

Tabla 6: Alfabeto griego					
Mayúscula	Minúscula	Nombre		Mayúscula	Minúscula
Α	α	alpha	ni	Ν	ν
Β	β	beta	xi	Ξ	ξ
Γ	γ	gamma	ómicron	Ο	ο
Δ	δ	delta	pi	Π	π
Ε	ε	épsilon	rho	Ρ	ρ
Ζ	ζ	zeta	sigma	Σ	σ
Η	η	eta	tau	Τ	τ
Θ	θ	theta	upsilon	Υ	υ
Ι	ι	iota	phi	Φ	ϕ
Κ	κ	kappa	ji, chi	Χ	χ
Λ	λ	lambda	psi	Ψ	ψ
Μ	μ	mu	omega	Ω	ω

2. Constantes físicas

Tabla 7: Algunas constantes físicas y sus valores	
Constante física	Valor
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 2.998x10^8 \frac{m}{s} \approx 3\,x10^8\ m/s$
Aceleración normal de la gravedad	$g = 9.80665\ m/s^2 \approx 9.8\,m/s^2$
Presión atmosférica normal	$P_n = 760\ mmHg = 1.013\,x10^5\ N/m^2$
Cero absoluto	$0\ K = -273.15\ °C$
Equivalente mecánico del calor	$J = 4.186\ cal$
Número de Avogadro	$N_A = 6.022x10^{23}\ moléculas/mol$
Unidad de masa atómica	$u = \frac{1}{12}\ masa\ del\ C_{12} = 1.660x10^{-27}\ kg \leftrightarrow 931\ MeV$
Radio de Bohr del átomo de hidrógeno	$r_1 = 0.053\ nm$
Energía de un electrón volt	$eV = 1.602x10^{-19}\,J$
Masa en reposo del:	
electrón	$m_e = 9.11x10^{-31}\ kg = 5.49\,x10^{-4}\,u \leftrightarrow 0.511\ MeV$
protón	$m_p = 1.673x10^{-27}\ kg = 1.007\ 276\ u \leftrightarrow 938.27\ MeV$
neutrón	$m_n = 1.675x10^{-27}\ kg = 1.008\ 665\ u \leftrightarrow 939.57\ MeV$
Carga del:	
electrón	$e^- = -1.602x10^{-19}\ C$
protón	$p = 1.602x10^{-19}\ C$
Constante:	
universal de los gases	$R = 8.314\ J/mol\,K = 1.99\,cal/mol\ K$
de la gravitación universal	$G = 6.67\,x10^{-11}\ Nm^2/kg^2$
de Coulomb o electrostática	$K_E = 8.9870\,x10^{-9}\ Nm^2/C^2 \approx 9\,x10^{-9}\ Nm^2/C^2$
de Planck	$h = 6.626\,x10^{-34}\,Js$
Boltzmann	$K_B = 1.38\,x10^{-23}\ J/K$
magnética	$K_M = 1\,x10^{-7}\ N/A^2$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 8.85x10^{-12}\ C^2/Nm^2$

Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0 = 4\pi\ x10^{-7}\ T\ m/A = 1.26\ x10^{-6}\ T\ m/A$

3. Datos del Sistema Solar

Tabla 8: Datos del Sistema Solar	
Magnitud	**Valor**
Masa	
de la Tierra	$m_T = 5.98x10^{24}\ kg$
de la Luna	$m_L = 7.25x10^{22}\ kg$
del Sol	$m_S = 2.0\ x10^{30}\ kg$
Diámetro	
de la Luna	$D_L = 3500\ km\ \approx 2160\ mi$
del Sol	$D_S = 1.4\ x10^6\ km\ \approx 864\ 000\ mi$
Radio	
ecuatorial de la Tierra	$r_T = 6.378x10^3\ km = 3963\ mi$
polar de la Tierra	$r_T = 6.357x10^3\ km = 3950\ mi$
promedio	$r_T = 6.4x10^3\ km\ (para\ calculos\ generales)$
Distancia promedio	
entre la Luna y la Tierra	$d_{LT} = 3.8\ x10^5\ km = 2.4\ x10^5\ mi$
entre la Tierra y el Sol	$d_{TS} = 1.5\ x10^8\ km = 93\ x10^6\ mi$
Velocidad de	
traslación de la Tierra alrededor del Sol	$v_T = 30\ km/s = 108\ 000\ km/h$
rotación de la Tierra en el Ecuador	$v_R = 463\ m/s = 1\ 666.66\ km/h$

4. Notación científica (Potencias de base 10)

Cuando se quiere expresar grandes o pequeñas cantidades para trabajar con ellas con mayor facilidad, es muy común emplear la notación científica, la cual consiste en escribir las cantidades en potencias de base 10.

Para comprender las potencias de base 10 y el beneficio de su uso, recordemos que si un número se eleva a una potencia, la potencia nos indica las veces que el número se multiplica por sí mismo. Ejemplos:

a) $6^2 = 6\ x6$
b) $9^3 = 9\ x\ 9\ x\ 9$
c) $2^5 = 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2$

En el caso de potencias de base 10, siempre será el número 10 el que se eleve a una potencia:

10^1	10	10^{-1}	$^1/_{10}$ =0.1
10^2	10 x 10 = 100	10^{-2}	$^1/_{10^2}$ = $^1/_{100}$ =0.01
10^3	10 x 10 x 10 = 1 000	10^{-3}	$^1/_{10^3}$ = $^1/_{1\ 000}$ =0.001
10^4	10 x 10 x 10 x 10 = 10 000	10^{-4}	$^1/_{10^4}$ = $^1/_{10\ 000}$ =0.0001
10^5	10 x 10 x 10 x 10 x 10 = 100 000	10^{-5}	$^1/_{10^5}$ = $^1/_{1\ 00\ 000}$ =0.00001
10^6	10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 = 1 000 000	10^{-}	$^1/_{10^6}$ = $^1/_{1\ 000\ 000}$ =0.000001

En el caso de la informática (sistema binario) los prefijos están referidos a potencias de 2:

k = 2^{10} = 1.024
M = 2^{20} = 1.048.576
G = 2^{30} = 1.073.741.824
T = 2^{40} = 1.099.511.627.776
P = 2^{50} = 1.125.899.906.842.624

5. Equivalencias entre las unidades de medida de algunas magnitudes físicas

Tabla 9: Equivalencias entre las unidades de medida de algunas magnitudes físicas			
a) Longitud	1 h = 60 min	**f) Velocidad**	**j) Densidad**
1 m = 100 cm	1 min = 60 s	1 km/h = 0.2778 m/s	1 g/cm^3 = 1 000 kg/m^3
1 m = 1000 mm	1 año = 365.24 días	1 milla/h = 1.609 km/h	1 g/cm^3 = 1 g/ml
1 cm = 10 mm	1 siglo = 100 años	1 m/s = 3.28 pies/s	1 g/cm^3 = 1 kg/litro
1 km = 1000 m	1 década = 10 años	1 nudo = 1.852 km/h	
1 angstrom (Å) = 1x10^{-8} cm	1 lustro = 5 años		**k) Presión**
1 (Å) = 1x10^{-10} m	1 día = 86 164 s	**g) Fuerza**	1 atm = 760 mm de Hg
1 m = 3.28 pies (ft)		1 kg$_f$ = 9.8 N	1 atm = 76 cm de Hg
1 m = 1.093 yardas	**d) Área o superficie**	1 kg$_f$ = 1 000 g$_f$	1 Pa = 1 N/m^2
1 milla = 1.609 km	(1 m)^2 = (100 cm)^2 = 1x10^4 cm^2	1 N = 1x10^5 dinas	1 atm = 1.013x10^5 N/m^2
1 milla marina = 1.852 km	(1 m)^2 = (3.28 pies)^2 = 10.76 pies^2	1 kg$_f$ = 2.2 lb$_f$	1 cm de Hg = 13.6 g$_f$/cm^2
1 pie (ft) = 12 pulgadas (in)	1 área = 100 m^2	1 lb$_f$ = 454 g$_f$	1 nudo = 1 milla marina/h
1 pulgada (in) = 2.54 cm	1 hectárea = 10 000 m^2	1 lb$_f$ = 4.448 N	1 cm de Hg = 0.0136 kg$_f$/cm^2
1 pie (ft) = 30.48 cm	1 acre = 4 840 yardas ^{2}		1 mm de Hg = 1.36x10^{-3} kg$_f$/cm^2
1 yarda = 3 pies	1 acre = 43 560 pies ^{2}	**h) Trabajo y energía**	1 mm de Hg = 1.36 g$_f$/cm^2
1 yarda = 91.44 cm	1 acre = 4 048.33 m^2	1 joule (J) = 0.24 cal	760 mm de Hg = 1.0336 kg$_f$/cm^2
		1 cal = 4.18 J	1 torr = 1 mm de Hg
b) Masa	**e) Volumen**	1 kWh = 3.6x10^6 J	1 bar = 1x10^5 N/m^2
1 kg = 1000 g	1 m^2 = 1 000 litros	1 eV = 1.602x10^{-19} J	
1 kg = 2.2 libras (lb)	1 m^2 = 1x10^6 cm^3		**l) Carga eléctrica**
1 libra (lb) = 454 g	1 litro = 1 000 cm^3	**i) Potencia**	1 C = carga de 6.24x10^{18} electrones
1 tonelada métrica = 1000 kg	1 litro = 1 000 ml	1 hp = 746 W	1 electrón = - 1.6 x10^{-19} C
	1 galón = 3.785 litros	1 cv = 736 W	1 protón = 1.6x10^{-19} C
c) Tiempo	1 ml = 1 cm^3	1 W = 1.341x10^{-3} hp	
1 h = 3 600 s	1 litro = 1 dm^3	1 hp = 0.178 kcal/s	

Lectura: Métodos de medición

Medición es el procedimiento para obtener información cuantitativa, comparándola en la práctica con determinada cantidad tomada como unidad de medida y para lo cual se emplean instrumentos.

Existen dos métodos de medición: el **directo** y el **indirecto**

El método directo se efectúa utilizando aparatos o instrumento de medición que proporcionan lecturas de forma directa; por ejemplo, una cinta métrica para medir longitudes, una báscula para medir pesos, un cronómetro para medir tiempo, un termómetro para medir temperaturas, etc., la elección de un instrumento de medición se determina por la precisión requerida y por las condiciones físicas que rodean a la medición. El valor de ésta depende de varios factores, como la calidad del aparato, la habilidad del observador y el número de mediciones efectuadas.

Por otra parte, el método indirecto se efectúa utilizando fórmulas en las cuales sus letras se reemplazan por los datos que conocemos para obtener el valor que deseamos medir; por ejemplo, un área, un volumen, una velocidad, etc.

Errores en la medición

Antes de realizar una medición con un grupo de instrumentos dados, es importante determinar qué tipos de errores pueden presentarse, para saber si se está dentro de nuestros requerimientos de exactitud.

Al hacer mediciones, las lecturas que se obtienen nunca son exactamente iguales, aun cuando las efectúe la misma persona, sobre la misma pieza, con el mismo instrumento, el mismo método y en el mismo ambiente (repetibilidad). Los errores surgen debido a la imperfección de los sentidos, de los medios, de la observación, de las teorías que se aplican, de los aparatos de medición, de las condiciones ambientales y de otras causas.

Las equivocaciones en las lecturas y registros de los datos, en general, son originadas por la fatiga del observador, la transcripción de los valores medidos a las planillas de los protocolos de ensayos, una desconexión fortuita de alguna parte del circuito de medición, entre otras.

Estas equivocaciones se caracterizan por su gran magnitud, y pueden detectarse fácilmente al comparar varias mediciones de la misma magnitud. Por ello se aconseja siempre realizar al menos tres mediciones repetidas.

La clasificación clásica de los errores lo hace en errores sistemáticos y en errores aleatorios.

1. Errores sistemáticos

Se llaman así porque se repiten sistemáticamente en el mismo valor y sentido en todas las mediciones que se efectúan en iguales condiciones.

Las causas de estos errores están perfectamente determinadas y pueden ser corregidas mediante ecuaciones matemáticas que eliminen el error. En algunos casos pueden emplearse distintos artificios que hacen que la perturbación se autoelimine.

Algunos de ellos son:

Errores por el instrumento o equipo de medición: Las causas de errores atribuibles al instrumento, pueden deberse a imperfecciones en el diseño y construcción de los instrumentos (dado que es imposible construir aparatos perfectos). Estos pueden ser deformaciones, falta de linealidad, imperfecciones mecánicas, falta de paralelismo, etcétera.

Mediante la calibración durante la construcción, se logra que para determinadas lecturas se haga coincidir las indicaciones del instrumento con valores obtenidos con un instrumento patrón local.

El error instrumental tiene valores máximos permisibles, establecidos en normas o información técnica de fabricantes de instrumentos, y puede determinarse mediante calibración.

Error por el uso de instrumentos no calibrados: instrumentos no calibrados o cuya fecha de calibración está vencida, así como instrumentos sospechosos de presentar alguna anormalidad en su funcionamiento no deben utilizarse para realizar mediciones hasta que no sean calibrados y autorizados para su uso.

Error por condiciones ambientales: Entre las causas de errores se encuentran las condiciones ambientales en que se hace la medición; entre las principales destacan la temperatura, la humedad, la presión atmosférica, el polvo y las vibraciones (ruido) o interferencias electromagnéticas extrañas.

Todos los materiales que componen tanto las piezas por medir como los instrumentos de medición, están sujetos a variaciones longitudinales debido a cambios de temperatura. Para minimizar estos errores se estableció internacionalmente, desde 1932, como norma una temperatura de 20°C para efectuar las mediciones. En general, al aumentar la temperatura crecen las dimensiones de las piezas y cuando disminuye la temperatura las dimensiones de las piezas se reducen.

La forma de eliminar estos errores es mediante el uso de las ecuaciones físicas correspondientes, que en los instrumentos de precisión, vienen indicadas en la chapa que contiene la escala del mismo.

En algunos casos, los instrumentos disponen de artificios constructivos que compensan la acción del medio externo. Por ejemplo, la instalación de resortes arrollados en sentidos contrarios, de manera que la dilatación térmica de uno de ellos se contrarresta por la acción opuesta del otro.

Por otra parte, la mejora tecnológica de las aleaciones utilizadas ha reducido mucho los efectos debidos a la acción de la temperatura ambiente.

Error por desgaste: Los instrumentos de medición, como cualquier otro objeto, son susceptibles de desgaste, natural o provocado por el mal uso o por rozamientos internos en el sistema móvil en los instrumentos analógicos, que produce una falta de repetitibilidad en la respuesta. Asimismo, los falsos contactos también dan lugar a la aparición de error.

Error por distorsión: Gran parte de la inexactitud que causa la distorsión de un instrumentó puede evitarse manteniendo en mente la ley de Abbe: la máxima exactitud de medición es obtenida si el eje de medición es el mismo del eje del instrumento.

2 - Errores aleatorios

Es un hecho conocido que al repetir una medición utilizando el mismo proceso de medición (el mismo instrumento, operador, excitación, método, etc.) no se logra el mismo resultado.

En este caso, los errores sistemáticos se mantienen constantes, y las diferencias obtenidas se deben a efectos fortuitos, denominados errores aleatorios.

Por ello, una característica general de los errores aleatorios es que no se repiten siempre en el mismo valor y sentido.

Algunos de ellos son:

Errores del operador o por el modo de medición: Muchas de las causas del error aleatorio se deben al operador, por ejemplo: falta de agudeza visual, descuido, cansancio, alteraciones emocionales, etcétera. Para reducir este tipo de errores es necesario adiestrar al operador.

Error por instrumento inadecuado: Antes de realizar cualquier medición es necesario determinar cuál es el instrumento o equipo de medición más adecuado para la aplicación de que se trate.

Errores por puntos de apoyo: Especialmente en los instrumentos de gran longitud la manera como se apoya el instrumento provoca errores de lectura. Para evitarlo deben utilizarse puntos de apoyo especiales.

Error por la fuerza ejercida al efectuar mediciones: La fuerza ejercida al efectuar mediciones puede provocar deformaciones en la pieza por medir, el instrumento o ambos.

Además de la fuerza de medición, deben tenerse presente otros factores tales como:

- Cantidad de piezas por medir
- Tipo de medición (externa, interna, altura, profundidad, etcétera.)
- Tamaño de la pieza y exactitud deseada.

Errores por método de sujeción del instrumento: El método de sujeción del instrumento puede causar errores, un indicador de carátula está sujeto a una distancia muy grande del soporte y al hacer la medición, la fuerza ejercida provoca una desviación del brazo.

La mayor parte del error se debe a la deflexión del brazo, no del soporte; para minimizarlo se debe colocar siempre el eje de medición lo más cerca posible al eje del soporte

Error de posición: Este error lo provoca la colocación incorrecta de las caras de medición de los instrumentos, con respecto de las piezas por medir.

En muchas mediciones, el resultado se obtiene por la observación de un índice (o aguja) en una escala, originándose así **errores de apreciación de la indicación.** Estos a su vez tienen dos causas diferentes que pasamos a explicar:

Error de paralaje

Se origina en la falta de perpendicularidad entre el rayo visual del observador y la escala respectiva, es decir, a la posición incorrecta del operador con respecto a la escala graduada del instrumento de medición, la cual está en un plano diferente Esta incertidumbre se puede reducir con la colocación de un espejo en la parte posterior del índice. Así la perpendicularidad del rayo visual se logrará cuando el observador no vea la imagen del mismo en el espejo, o mirando perpendicularmente el plano de medición a partir del punto de lectura.

Error del límite separador del ojo

El ojo humano normal puede discriminar entre dos posiciones separadas a más de 0.1 mm, cuando se observa desde una distancia de 300 mm. Por lo tanto, si dos puntos están separados a menos de esa distancia no podrá distinguirlos.
La magnitud de este error es típicamente subjetiva, pues hay personas que tienen una visión mejor o peor que la normal.

Para disminuir este tipo de error se puede recurrir al uso de lentes de aumento en las lecturas.

En los instrumentos provistos con una indicación digital, la representación de la magnitud medida está limitada a un número reducido de dígitos.

Por lo tanto, en tales instrumentos no pueden apreciarse unidades menores que la del último dígito del visor (o display), lo que da lugar a un error por el truncamiento de los valores no representados.

Precisión o incertidumbre de un aparato o instrumento de medición

Se denomina *precisión* a la capacidad de un instrumento de dar el mismo resultado en mediciones diferentes realizadas en las mismas condiciones. Esta cualidad debe evaluarse a corto plazo. No debe confundirse con exactitud ni con reproducibilidad.

Se denomina *exactitud* a la capacidad de un instrumento de medir un valor cercano al valor de la magnitud real. Exactitud implica precisión. Pero no al contrario. Esta cualidad también se encuentra en instrumentos generadores de magnitudes físicas, siendo en este caso la capacidad del instrumento de acercarse a la magnitud física real.

Exactitud y precisión no son equivalentes. Exactitud es capacidad para acercarse a la magnitud real y precisión es la capacidad de realizar medidas similares.

Analogías útiles

Ejemplo 1. Varias medidas son como *flechas* disparadas hacia un objetivo. La exactitud describe la proximidad de las flechas al centro del objetivo. Las flechas que impactaron más cerca del centro se consideran más exactas. Cuanto más cerca están las medidas a un valor aceptado, más exacto es un sistema.
La precisión, en este ejemplo, es el tamaño del grupo de flechas. Cuanto más cercanas entre sí estén las flechas que impactaron el objetivo, más preciso será el sistema. Hay que notar que el hecho de que las flechas estén muy cercanas entre sí es independiente al hecho que estén cerca del centro del objetivo. En sí, se puede decir que la precisión es el grado de repetibilidad del resultado. Se podría resumir que exactitud es el grado de veracidad, mientras que precisión es el grado de reproductibilidad.

Ejemplo 2. Un reloj analógico, de manecillas, desplaza su minutero "sólo de minuto en minuto", si bien lo hace en absoluta sincronía con el horario oficial o "real" (que es el objetivo). Un segundo reloj utiliza minutero, segundero, incluso está dotado de un sistema de medición de décimas de segundo. Si observamos que su horario, no coincide plenamente con el horario oficial o real (que sigue siendo el objetivo de todo reloj), concluiremos que el primer reloj es altamente exacto, aunque no sea preciso, mientras que el segundo, es altamente preciso, aunque no se muestra exacto al menos en nuestro ejemplo.

Cálculo de errores en las mediciones

En general los resultados de las mediciones no son exactos. Por más cuidado que se tenga en todo el proceso de la medición, es imposible expresar el resultado de la misma como exacto. Aún los patrones tienen error.

Se llama **error absoluto** (**E**) a la diferencia entre el valor obtenido o medido (**Vo**) y el valor aceptado o verdadero (**Va**) de la respectiva magnitud:

$$E = V_o - V_a$$

El *valor absoluto* de una cantidad es el número que representa la cantidad prescindiendo del signo o sentido de la cantidad. Se representa colocando el número que corresponda a dicho valor entre dos líneas verticales | |.

El error absoluto será *positivo* cuando se mida en exceso y *negativo* cuando se lo haga en defecto.

El valor aceptado o verdadero es casi imposible de conocer. En la práctica puede tomarse como tal al hallado a través de un muestreo estadístico de un gran número de mediciones, que se adopta como valor verdadero convencional o valor promedio (media aritmética).

$$V_a = \frac{\Sigma V_o}{n}$$

El concepto de error absoluto no nos da una idea clara de la bondad de la medición efectuada. Por ejemplo, es muy distinto cometer un error de 10 V al medir 13200 V, que al medir 220 V.

Por lo tanto, es conveniente referir el error absoluto al valor aceptado o verdadero (o aquel tomado como tal), para poder comparar los resultados de las mediciones efectuadas, obteniéndose así el **error relativo** (**Er**) en tanto por uno:

$$E_R = \frac{E}{V_a}$$

En valores **porcentuales**:

$$\%e = E_r\, x\, 100$$

Cifras significativas

Los científicos procuran que sus datos experimentales no digan más de lo que pueden decir según las condiciones de medida en los que fueron obtenidos. Por ello ponen cuidado en el número de cifras con que expresar el resultado de una medida con el propósito de incluir sólo aquellas que tienen algún significado experimental. Tales cifras reciben el nombre de cifras significativas. Una cifra es significativa cuando se conoce con una precisión aceptable. Así, cuando se mide con un termómetro que aprecia hasta 0.1 °C no tiene ningún sentido que se escriban resultados del tipo 36,25 °C o 22,175 °C, por ejemplo.

Todas las cifras que figuran en un resultado deben ser significativas. Este mismo criterio general debe respetarse cuando se opera con datos experimentales; es una cuestión de sentido común que por el simple hecho de operar con los números no es posible mejorar la precisión de los resultados si éstos tienen una base experimental. Cuando un resultado se escribe de modo que todas sus cifras sean significativas proporciona por sí mismo información sobre la precisión de la medida.

Para manejar correctamente los resultados expresados mediante cifras significativas es necesario seguir las siguientes reglas:

a) Cuando los ceros figuran como primeras cifras de un resultado no son considerados como cifras significativas, por ello el número de cifras significativas de un resultado es el mismo, cualquiera que sea la unidad en la que se exprese. Así, por ejemplo, si se desea expresar en metros el resultado de medir una longitud *l* de 3,2 cm con una regla que aprecie hasta el milímetro se tendrá: *l* = 3,2 cm = 0,032 m y el resultado seguirá teniendo dos cifras significativas. Por esta razón se acostumbra a escribirlo recurriendo a las potencias de 10: $l = 3{,}2 \times 10^{-2}$ m.

b) Cuando los ceros figuran como últimas cifras de números enteros, ello no implica que deban ser considerados, necesariamente, como cifras significativas. Así, por ejemplo, cuando se expresa la anterior cantidad en micras resulta *l* = 32 000 μ (1 μ = 1 milésima parte del mm = 10^{-3} mm); ello no quiere decir que el resultado tenga cinco cifras significativas, sino sólo dos en este caso. Para evitar este tipo de confusiones lo más apropiado es escribir el dato recurriendo, de nuevo, a las potencias de 10: $l = 3{,}2 \times 10^{-5}$.

Es posible preguntarse cómo arrastrar las cifras significativas en operaciones tales como la multiplicación o la división. Cuando se dispone de una calculadora electrónica parece como si se estuviera tentado a escribir los resultados con tantas cifras decimales como aparecen en pantalla, pero esto la mayoría de las veces carece de sentido. Valga como ejemplo el siguiente caso:

Se desea encontrar cuál es la superficie de una tira de papel. Se mide su longitud y su anchura utilizando una regla que aprecia hasta los milímetros y se obtiene 53,2 y 4,1 cm respectivamente. Multiplicando ambos resultados resulta: S = 53,2 x 4,1 = 218,12 cm ².

Pero ¿cuántas de estas cifras son verdaderamente significativas? La regla que sigue es la siguiente: el número de cifras significativas de un producto (o de un cociente) entre datos que corresponden a resultados de medidas no puede ser superior al de cualquiera de los factores. En el presente caso 4,1 tiene

dos cifras significativas, luego el resultado en rigor se escribiría como: S = 220 cm ².

Cuando como en este ejemplo es preciso redondear alguna cifra por no resultar significativa, se desprecia si es igual o interior a la mitad del valor de la unidad de la última cifra significativa y si es superior se considera ésta incrementada en una unidad. Dado que en el presente ejemplo 8 está por encima de la mitad de unidad de las decenas (10/2) se ha escrito el resultado como 220 cm ² y no como 210 cm ².

Lectura: Funciones y gráficas

Los científicos, al estudiar los fenómenos que se producen en la naturaleza, comprueban que en ellos, generalmente hay dos (o más) magnitudes relacionadas entre sí. Esto significa que al variar una de las magnitudes, la otra también cambia. Por ejemplo, la longitud de un tramo de riel de acero aumenta cuando se eleva su temperatura; la fuerza que un imán ejerce sobre un clavo disminuye cuando aumentamos la distancia entre ambos, etc.

Cuando esto sucede, es decir, cuando las magnitudes están relacionadas, decimos que **una es *función* de la otra.** Así, la longitud del riel es función de su temperatura, y la fuerza que el imán ejerce sobre el clavo también es función de su distancia.



R. Descartes

Uno de los conceptos más importantes en matemática es el de función. El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia x^n de la variable x.

En 1694 el matemático alemán G. W. Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. La noción de función que más se utiliza en la actualidad fue dada en el año 1829 por el matemático alemán, J.P.G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859).

Las funciones permiten describir el mundo real en términos matemáticos, como por ejemplo, las variaciones de la temperatura, el movimiento de los planetas, las ondas cerebrales, los ciclos comerciales, el ritmo cardíaco, el crecimiento poblacional, etc.

El uso de tablas y gráficas para presentar un conjunto de observaciones y resultados experimentales, son formas de presentar de una manera clara y compacta los datos de una investigación o experiencia.

Las gráficas que más se utilizan en las ciencias son las denominadas gráficas funcionales. En este tipo de gráficas las variables se relacionan mediante una función matemática (ecuación).

Una variable puede considerarse dependiente o independiente según las condiciones del experimento y el criterio del experimentador.

La convención establece que la **variable independiente**, es decir, *la que el experimentador controla*, se debe graficar en el eje de las abscisas (el eje horizontal), mientras que la **variable dependiente**, cuyo valor se determina en función del valor de la otra variable independiente, se representa en el eje vertical.

La obtención de la ecuación matemática de la gráfica, se da en virtud de las características de esta, y en su aplicación, los científicos, ingenieros, médicos, administradores y otros profesionistas, han llegado a la comprensión de diversos fenómenos naturales y a sus modelos matemáticos, que es la forma más precisa y rigurosa en la que se expresa una ley científica.

Funciones

En muchas situaciones encontramos que dos o más objetos o cantidades están relacionados por una correspondencia de dependencia, como por ejemplo: el área de un círculo depende del radio del mismo, la temperatura de ebullición del agua depende de la altura del lugar, la distancia recorrida por un objeto al caer libremente depende del tiempo que transcurre en cada instante. Esto nos conduce al concepto matemático de función.

Definición de función

Una *función f* de un conjunto A en un conjunto B es una *regla* que hace corresponder a cada elemento *x* perteneciente al conjunto A, uno y solo un elemento y del conjunto B, llamado *imagen* de *x* por *f*, que se denota $y = f\,(x)$.

En símbolos, se expresa $f : A \rightarrow B$, siendo el conjunto A el *dominio* de *f*, y el conjunto B el *codominio.*

Nociones básicas y notaciones

Sea $f : A \rightarrow B$.

1) La notación $y = f\,(x)$ señala que *y* es una función de *x*. La variable *x* es la *variable independiente*, y el valor *y se llama variable dependiente*, y *f* es el nombre de la función.

2) Leonard Euler (1707-1783) dio una definición precisa de función e introdujo en 1734 el símbolo *f*(*x*) para designar la imagen de *x* por una función *f*.

3) El conjunto de todas las imágenes de los elementos de *A* a través de *f* se denomina *Recorrido* de *f*, y se denota $Rec(f)$.

4) Igualdad *de funciones.* Sean f y g dos funciones definidas de A en B. Se tiene que:

$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in A$

Luego, dos funciones f y g son distintas, si y sólo si, existe $x \in A$ tal que $f\ (x) \neq g(x)$.

5) *Composición de funciones.*
Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$. La *función compuesta* g o f está definida siempre y cuando $Rec(f) \subseteq C$, y se define:

$(g\ o\ f)(x) = g(f\ (x))$, para todo $x \in A$.

Funciones reales

Una función real en una variable x es una función $f : A \rightarrow IR$ donde $A \subseteq IR$, que usualmente se define por una fórmula $y = f(x)$.

Nota. En general, para definir una función real se usan las letras x e y para representar las variables independiente y dependiente, respectivamente. En modelos de aplicaciones se usan letras relacionadas con el nombre de las magnitudes involucradas en el problema.

Representaciones de una función real

Una función real, en general, puede ser representada de distintas maneras:

- Mediante un *conjunto de pares ordenados*, o tabla de valores.
- Mediante una *expresión verbal*, donde se describe una regla con una descripción en palabras.
- Mediante una *expresión algebraica*, con una fórmula explícita.
- Mediante una *gráfica*, representada en un sistema de coordenadas cartesianas.

Estas cuatro formas de representar una función son equivalentes, sin embargo no siempre es posible el paso de una a otra.

Observaciones. Sea f una función real definida mediante la fórmula o ecuación $y = f\ (x)$.

- La variable x es la ***variable independiente***, y la variable y es la ***variable dependiente***. Así, una función real, es una función de variable y valor real.
- El **dominio** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
- El **recorrido** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.
- **Regla del máximo dominio:** cuando no se presenta el dominio de f explícitamente, se considera como su dominio, el máximo subconjunto de *IR*, donde la fórmula puede evaluarse. Este conjunto es llamado el *dominio de definición* de *f*, o simplemente, el dominio de *f*.

  Por ejemplo, el *dominio* de la función $f\ (x) = \sqrt{x(5-x)}$ es el intervalo [0, 5].

- En aplicaciones específicas, el dominio de una función está restringido por las condiciones de un problema. Es usual llamar *dominio práctico* al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente para que el problema específico tenga sentido.

Gráfica de una función

Las gráficas permiten obtener una representación visual de una función. Éstas entregan información que puede no ser tan evidente a partir de descripciones verbales o algebraicas.

Para representar gráficamente una función $y = f(x)$, es común utilizar un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, en las cuales, la variable independiente x se representa en el eje horizontal, y la variable dependiente y en el eje vertical.

La **gráfica** de $y = f\ (x)$ es el conjunto: $f = \{(x, f\ (x))\ /\ x \in Dom(f\ )\}$.

Técnicas básicas para esbozar la gráfica de una función

A continuación se describen algunos pasos a seguir para obtener un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$, por medio de la representación de puntos:

1) Determinar los puntos de intersección de $y = f(x)$ con cada eje coordenado.

2) Construir una tabla de valores de *f*. Escoger un grupo representativo de valores de x en el dominio de *f*, y construir una tabla de valores $(x, f(x))$.

3) Representar los puntos $(x, f(x))$ considerados en la tabla, en el sistema de coordenadas.

4) Unir los puntos representados por medio de una curva suave.

Nota. Muchas curvas diferentes pasan a través de los puntos considerados en la tabla de valores. Para aproximarse mejor a la curva que represente a la función dada, graficar nuevos puntos.

Funciones polinominales

Las funciones polinominales y su representación gráfica, tienen gran importancia en la Matemática. Estas funciones son modelos que describen relaciones entre dos variables que intervienen en diversos problemas y/o fenómenos que provienen del mundo real.

Una función polinominal *f* es una función de la forma: $f\ (x)a_n\, x^n + \cdots + a_1 1x\, a_0$ donde *n* es un entero no negativo, y los coeficientes $a_n, \dots, a_1, a_0$ son números reales.

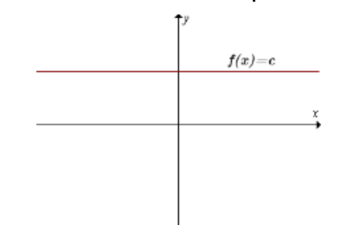
Ejemplos de funciones polinominales:

$f\ (x) = 5$ $\quad f\ (x) = 4x + 1$ $\quad f\ (x) = -x^2 + 3x - 1$ $\quad f\ (x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$

Alguna propiedades de las funciones polinominales

1. La gráfica de $y = f\ (x)$ intercepta al eje *Y* en el punto (0,*c*)
2. La gráfica de $y = f\ (x)$ intercepta al eje *X* en los puntos cuyas abscisas son las raíces de la ecuación
$$a_n\, x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$
3. Las funciones polinomiales son funciones continuas.

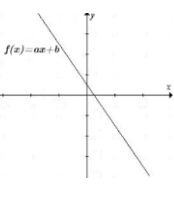
Entre las funciones polinominales se encuentran por ejemplo: las funciones constantes, las funciones lineales, las funciones cuadráticas, las funciones cúbicas, cuyas principales características se describirán a continuación.



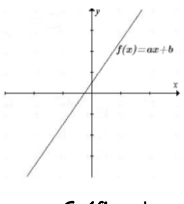
Una ***función constante*** es aquella que tiene la forma $y = f(x) = c$, donde c es un número real fijo.

El *dominio* de una *función* constante es *IR*, y su *recorrido* es {*c*}. Su gráfica es una recta paralela (o coincidente) al eje *X*.

Una ***función lineal*** es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma: $y = f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, $a, b \in IR$.



Gráfica de $y = ax + b\, ,a < 0$



Gráfica de $y = ax + b\, ,a > 0$

Propiedades

1. El gráfico de una función lineal es siempre una línea recta.

2. El coeficiente *a* es la pendiente de la recta $y = ax + b$.

Cuando $a > 0$, la función lineal es *creciente*, y cuando $a < 0$, la función lineal es *decreciente*.

3. El dominio y el recorrido de una función lineal es *IR*.

4. La función lineal $y = f\ (x) = ax + b$, con $a \neq 0$ es inyectiva (y sobre), por lo tanto, tiene inversa. Su inversa es también una función lineal:
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

Observación. *Ecuación general de la recta*
La ecuación general de una recta es $Ax + By + C = 0$ con $A \neq 0$ o $B \neq 0$.
• Cuando $B = 0$, la gráfica es una recta paralela al eje Y o coincidente con este eje.
• Cuando $B \neq 0$, la gráfica es una recta que tiene pendiente igual a $m = -\frac{A}{B}$.

Una ***función cuadrática*** es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ \text{con}\ a \neq 0\ ,\ a, b, c \in IR.$$

Propiedades de una función cuadrática

1. El gráfico de una función cuadrática es una *parábola*.

2. La gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje *Y* en el punto $(0, c)$

La gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje *X* cuando $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, y en tal caso, las abscisas de los puntos de intersección son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

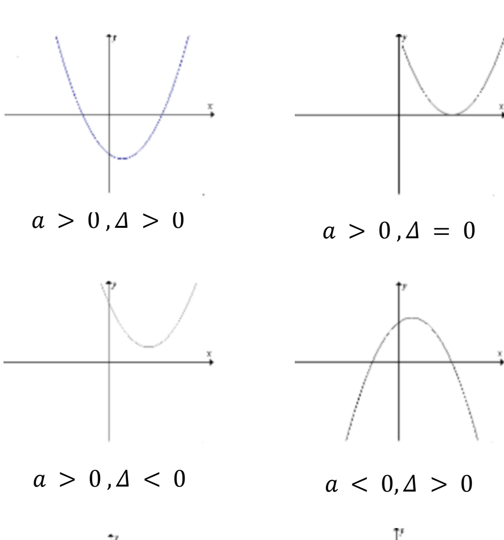
3. Su gráfica es una parábola cuyo vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

4. La recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ es una recta eje de simetría de su gráfico.

5. Si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba, y si $a < 0$ se abre hacia abajo.

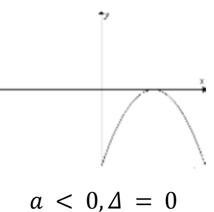
Gráfica de una función cuadrática

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

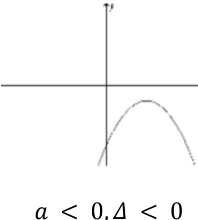


$a > 0, \Delta > 0$ $a > 0, \Delta = 0$

$a > 0, \Delta < 0$ $a < 0, \Delta > 0$



$a < 0, \Delta = 0$



$a < 0, \Delta < 0$

Proporcionalidad

a) Se dice que *A* varía directamente a *B* o que *A* es ***directamente proporcional*** a *B* cuando multiplicando o dividiendo una de estas dos variables por una cantidad, la otra queda multiplicada o dividida por esa misma cantidad.

En general, si *A* es proporcional a *B*, la relación entre *A* y *B* es constante; luego, designando esta constante por k, tenemos:

$$\frac{A}{B} = k$$

Una variable *y* es *directamente proporcional* a la variable *x*, si existe una constante k distinta de 0 tal que:

$$y = k x$$

La constante k se llama *constante de proporcionalidad.*

b) Se dice que *A* varía inversamente a *B* o que *A* es ***inversamente proporcional*** a *B* cuando multiplicando o dividiendo una de estas variables por una cantidad, la otra queda dividida en el primer caso y multiplicada en el segundo por la misma cantidad.

En general, si *A* es inversamente proporcional a *B*, el producto AB es constante; luego, designando esta constante por k, tenemos:

$$AB = k \quad y\ de\ aqí \quad A = \frac{k}{B}$$

Una variable *y* es *inversamente proporcional* a la variable *x*, si existe una constante *k* distinta de 0 tal que:

$$y = \frac{k}{x}$$

c) Se dice que una función $f(x)$ es una *función potencia* de *x* si $f(x)$ es **proporcional a una potencia** de *x*. Si *c* es la constante de proporcionalidad, y *m* es la potencia, entonces:

$$f(x) = c\,x^m$$

Nota. Las funciones definidas por proporcionalidad directa o inversa, son ejemplos de funciones de potencia.

Ejemplos

1) $y = 0.03x$, $y = 3x^2$, $y = 5\sqrt{x}$, $y = \frac{2}{5x}$, $y\ \frac{5}{x^3}$ son funciones de potencia.

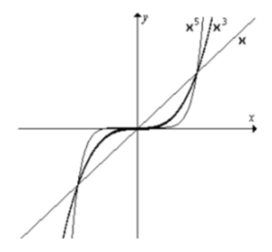
2) El período del péndulo T, es la cantidad de tiempo necesaria para que el péndulo realice una oscilación completa.

Resultado de experimentos, se ha encontrado que para oscilaciones pequeñas, el período T es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud L del péndulo, expresado mediante la relación: $T = k\sqrt{L}$, donde k es una constante.

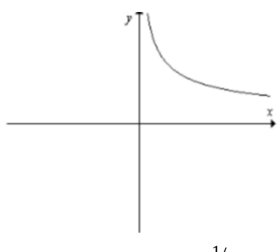
3) El peso w de un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r, desde el centro de la Tierra al objeto. Luego, existe una constante k tal que: $w = \frac{k}{r^2}$

Graficas de funciones de potencia

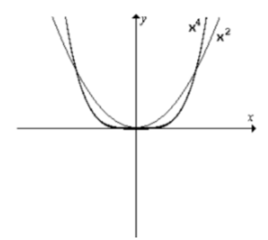
$f(x) = c\,x^m$



Gráficas de $y = x^m$
para m entero positivo impar



Gráfica de $y = x^{-1/2}$



Gráficas de $y = x^m$
para m entero positivo par

Nota. La gráfica de $f\ (x)\ =\ c\,x^m$ está relacionada con la gráfica de $y\ =\ x^m$.

Observación. Las funciones revisadas hasta el momento son **funciones algebraicas**.

Lectura: Magnitudes vectoriales

Las magnitudes físicas se pueden clasificar en *escalares* y *vectoriales.*

Las **magnitudes escalares** tienen sólo tamaño (que de ahora en adelante llamaremos *módulo o simplemente magnitud*).

Son ejemplos de estas: el tiempo, la masa, la rapidez, la longitud de un recorrido, la energía, el trabajo, el voltaje, la potencia.

Las **magnitudes vectoriales** poseen además de *módulo*, *dirección* y *sentido.*

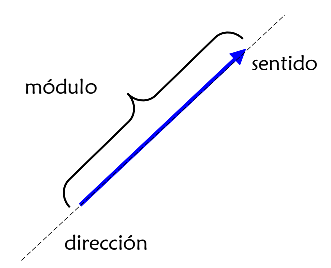
Caracteristicas de un vector

Un **vector** se representa mediante un **segmento orientado** (flecha), como lo indica la figura.

El **módulo** del vector nos lo da el tamaño de dicha "flecha". Así por ejemplo, si la cantidad vectorial se duplica, la "flecha" que la representa se deberá dibujar de doble tamaño.

La **dirección** del vector, está dada por el valor del ángulo que define la pendiente de la recta sobre la cual se "apoya" la "flecha" que la representa, es decir, la recta sobre la que esta dibujado o cualquiera de sus paralelas.

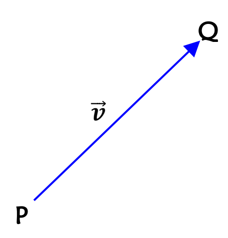
El **sentido** queda definido por la "cabeza" o "punta" de la flecha.



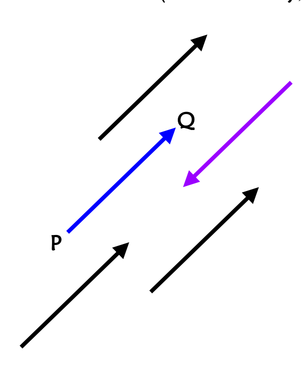
Un vector no tiene una ubicación definida; puede trasladarse a cualquier lugar del plano sin modificar ni su módulo, ni su orientación (dirección y sentido). Por esta razón se dice que los vectores son **libres**.

Los vectores se expresan con una letra minúscula o con dos letras mayúsculas, su origen y su extremo respectivos. Por ejemplo, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ indica el vector que tiene origen en el punto **P** y extremo en el punto **Q**.

Siempre que sea posible, pondremos una flecha encima para indicar que se trata de un vector.



Los vectores sirven para representar magnitudes geométricas y físicas que tienen módulo, dirección y sentido, como traslaciones, velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento (momentum), elongación, peso.



Como lo que caracteriza a un vector es su módulo, su dirección y su sentido, dos vectores son **iguales** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Por ejemplo, todos los vectores de color *negro* de la figura son iguales.

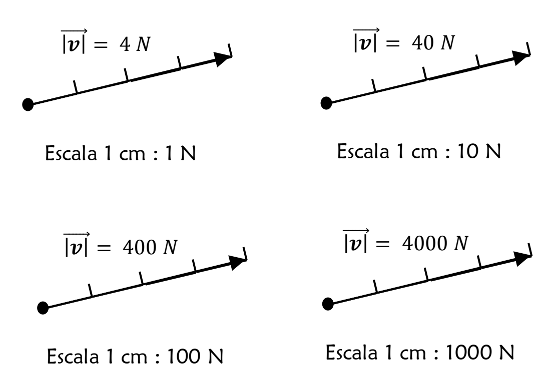
Observando la figura, el vector $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ es igual a los vectores representados en *negro*, en cambio, el vector *lila*, que tiene sentido opuesto, no es igual a estos, más bien, es el vector **negativo** $-\vec{v} = \overrightarrow{QP}$.

Módulo de un vector

El módulo de un vector es un **número siempre positivo** y solamente el vector nulo tiene módulo cero.

El módulo del vector $\vec{a}$ se expresa $|\vec{a}|$. Así, por ejemplo, podemos escribir $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ y $|\vec{c}| = 5$ para indicar que, $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tienen módulo 3, 4 y 5 respectivamente.

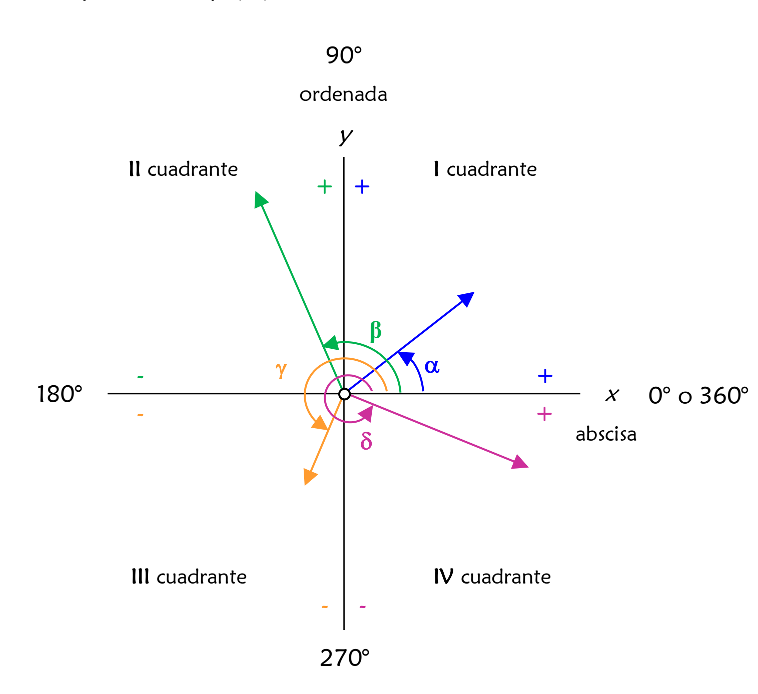
Para representar el módulo de un vector, **se establece una escala convencional** según nuestras necesidades. En general lo recomendable es usar escalas de 1:1, 1:10, 1:100 y 1:1000, siempre que sea posible.



Angulo de un vector

Podemos considerar que un vector $\vec{v}$, tiene un ***ángulo***, si este se forma con respecto al semieje de las abscisas positivas OX.

En la figura se tienen cuatro vectores con ángulos respectivos α, β, γ y δ.

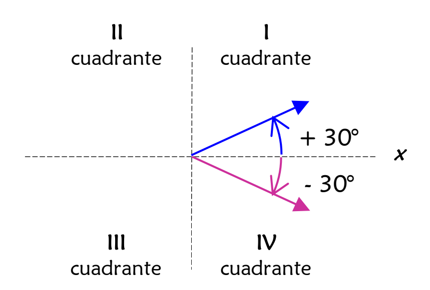


Los ángulos se suelen expresar en grados o en radianes.

Tabla: Signo de los ejes cartesianos

Cuadrante	Eje x abscisa	Eje y ordenada
I (0° a 90°)	+	+
II (90° a 180°)	-	+
III (180° a 270°)	-	-
IV (270° a 360°)	+	-

Se consideran ***positivos*** los ángulos recorridos a partir de OX en sentido contrario a las manecillas del reloj, y ***negativos*** los recorridos en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

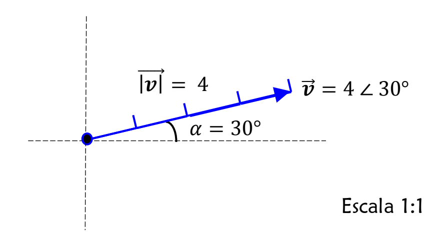


Vectores en NOTACIÓN POLAR

Un vector queda perfectamente determinado en notación polar, si conocemos su módulo y su ángulo. *Su módulo es un número positivo.*

Indicaremos un vector de módulo $\vec{v}$ y ángulo **α** de la forma $|\vec{v}|\angle\alpha$; esta forma es la llamada **notación polar** de un vector.

Ejemplo. $\vec{v} = 4\angle 30°$



Vectores en NOTACIÓN CARTESIANA

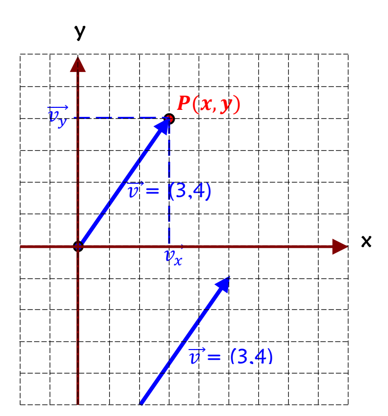
Un vector también puede venir dado por un par de números.

Definamos en el plano donde tenemos los vectores un sistema de coordenadas. Es decir, un punto **origen**, y dos **ejes** perpendiculares. A todo punto **P** haremos corresponder un par de números que son sus coordenadas **(*x*,*y*)**; se escribe **P(x,y)**.

Un vector $\vec{v}$ queda identificado por los dos números de sus componentes (x,y) y se escribe $\vec{v} = (v_x, v_y)$; esta forma es la llamada **notación cartesiana o rectangular** de un vector.

Ejemplo $\vec{v} = (3{,}4)$

Puede decirse que dos vectores son *iguales* (es decir, con la misma dirección, el mismo sentido y el mismo modulo) si y sólo si tiene las mismas componentes.



Vector unitario

Por definición, *un vector unitario* $\hat{\mathbf{n}}$ *es una cantidad que tiene una dirección y sentido y cuya magnitud es la unidad.* Resulta muy útil que cualquier vector **F** pueda expresarse como el vector unitario **n**, tomado en la misma dirección que **F**, multiplicado por la magnitud *F*. Esto se ilustra en la figura 1, en donde **n** simplemente se sobrepone a **F** de manera que **F** = *F* **n**. Si un vector unitario **n'** está en la dirección opuesta pero a lo largo de la misma línea de acción que **F**, **F** puede escribirse como (-1) *F***n'**. La magnitud de ese vector es la cantidad no negativa *F*; el escalar, -1, invierte la dirección de **n'**.

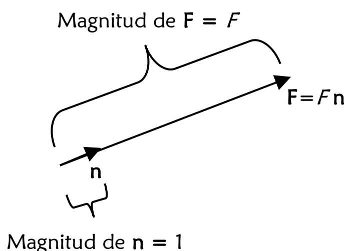
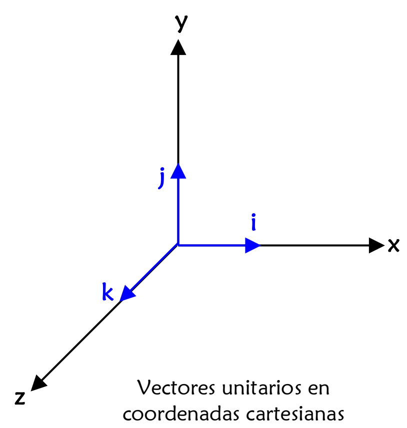


Figura 1

El concepto de vector unitario puede extenderse a las componentes de los vectores. Los vectores unitarios a lo largo de los ejes cartesianos rectangulares se usan con tanta frecuencia que sus nombres **i, j** y **k**, han sido ampliamente aceptados, según se muestra en la figura 2. Cada uno de estos vectores tiene como magnitud la unidad. Estos vectores unitarios, a los que se llama *vectores coordenados unitarios*, suministran un esquema de notación escrito y conciso para los vectores en el sistema coordenado rectangular.



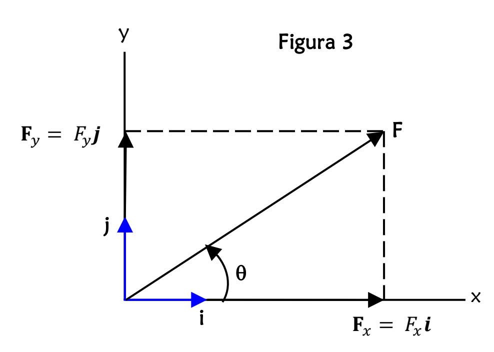
Vectores unitarios en coordenadas cartesianas

Figura 2

En la figura 3 se muestra el esquema para una fuerza con componentes bidimensionales. El vector componente $\mathbf{F}_x$ puede escribirse como $\mathbf{F}_x$ multiplicado por el vector unitario **i**, y lo mismo sucede para el componente y,

$$\mathbf{F}_x = F_x\boldsymbol{i} \qquad \mathbf{F}_y = F_y\boldsymbol{j}$$

Figura 3



Notación de vector unitario para las componentes del vector F

La fuerza original F queda completamente determinada por:

$$\mathbf{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

La notación de vector unitario resulta conveniente en la adición vectorial. Puesto que la adición o substracción de los vectores uniaxiales puede realizarse como una adición o substracción escalar (figura 1), todas las componentes denotadas por el mismo vector unitario se suman como escalares. Por lo tanto, si **A**, **B** y **C** son vectores coplanares y **R** es su resultante, **A+B+C = R** se puede escribir como

$$A_x\, i + A_y\, j + B_x\, i + B_y\, j + C_x\, i + C_y\, j =$$

$$(A_x + B_x + C_x)i + \left(A_y + B_y + C_y\right)j = R_x\, i + R_y\, j$$

Utilizando la sumatoria para cualquier número de vectores,

Componentes escalares:

$$\mathbf{R}_x = \sum(componente\ x)$$

$$\mathbf{R}_y = \sum(componente\ y)$$

Componentes vectoriales:

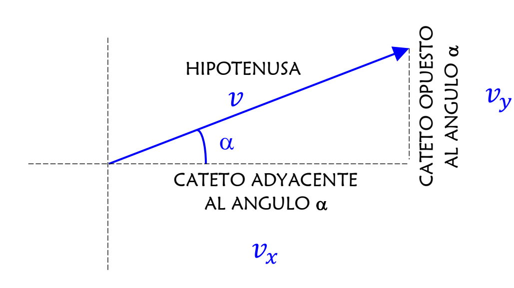
$$\mathbf{R}_x = \sum \mathbf{F}_x = \sum F_x\boldsymbol{i}$$

$$\mathbf{R}_y = \sum \mathbf{F}_y = \sum F_y\boldsymbol{j}$$

Obsérvese que en la práctica, el paso intermedio $A_x\, i + B_x\, i + \cdots$ suele omitirse y se escribe directamente $(A_x + B_x + \ldots)\boldsymbol{i}$

Procedimiento para transformar vectores de notación polar a cartesiana

Conociendo el módulo y el ángulo de un vector $\vec{v}$, podemos calcular sus componentes (v_x, v_y) utilizando las ***relaciones trigonométricas***.



$$seno\ de\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{v_y}{v}$$

$$coseno\ de\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{v_x}{v}$$

Entonces la componente v_x ("horizontal") vale $\boldsymbol{v_x = v\cos\alpha}$

Entonces la componente v_y ("vertical") vale $\boldsymbol{v_y = v\,\text{sen}\,\alpha}$

Tabla: Signos de las funciones trigonométricas seno y coseno		
Cuadrante	**cos**	**sen**
I (0° a 90°)	+	+
II (90° a 180°)	-	+
III (180° a 270°)	-	-
IV (270° a 360°)	+	-

Resumiendo, si tenemos en cuenta que indicamos un vector de módulo y ángulo con la notación $\vec{v} = v\angle\alpha$, podemos escribir:

$$\vec{v} = v\angle\alpha = (v\cos\alpha, v\,sen\,\alpha)$$

Ejemplo: Transformar el vector $\vec{v} = 5\,u\ \angle 60°$, a un vector en notación cartesiana (v_x, v_y).

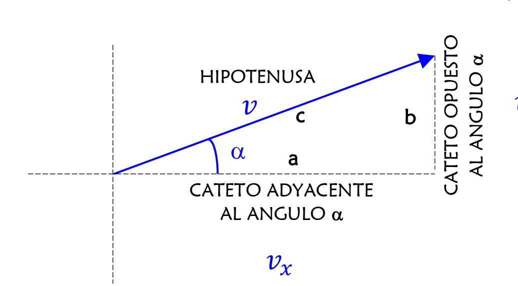
Podemos escribir:

$$\vec{v} = 5\angle 60° = (5\cos 60\,, 5\,sen\,60) = (2.5\,, 4.3)$$

Procedimiento para transformar vectores de notación cartesiana a polar

Conociendo las componentes de un vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$, podemos calcular su modulo $|\vec{v}|$ utilizando el ***Teorema de Pitágoras***.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Por lo que: $|\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$

Este procedimiento para calcular el módulo se puede aplicar tanto si las componentes de $\vec{v}$ son positivas, como si son negativas, dando como resultado un módulo siempre positivo.

Para calcular su ángulo **α** tengamos en cuenta que: $Tan\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{v_y}{v_x}$

Por lo que: $\alpha = arc\tan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$

Ejemplo: Transformar el vector $\vec{v} = (2.50\,u, 4.33\,u)$, a un vector en notación polar $\vec{v} = v\angle\alpha$.

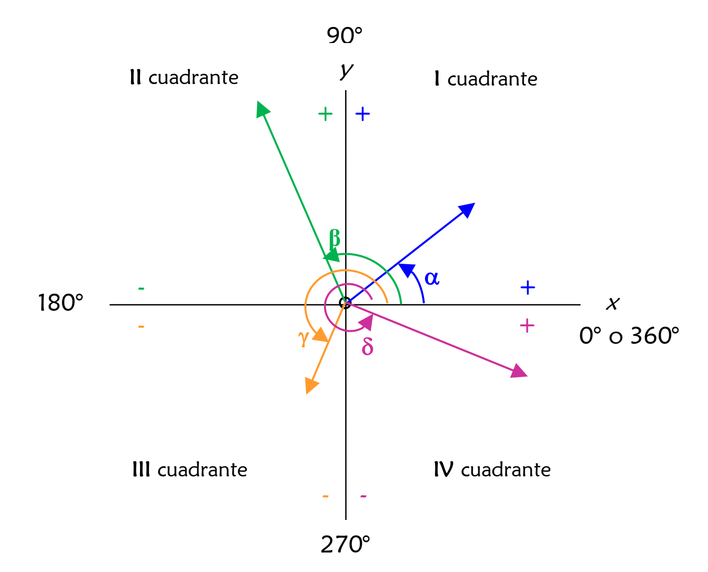
Podemos escribir:

$$\vec{v} = |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{2.50^2 + 4.33^2} = 4.99\,u\ \ ;\ \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4.33}{2.50}\right) = 59.9°$$

$$por\ lo\ tanto: \vec{v} = (2.50\,u, 4.33\,u) = 5u\ \angle\mathbf{60°}$$

La función **arc tan** x, que en las calculadoras generalmente corresponde al botón $\boldsymbol{tan^{-1}}$, devuelve un ángulo comprendido entre -90° y 90° que tiene por tangente x. Si el vector está situado en el **II** o **III** cuadrante se ha de efectuar una corrección al valor de $arc\ tan\ (\frac{v_y}{v_x})$ consistente en sumarle 180°.

Por lo que, el ángulo se calcula según el cuadrante como:



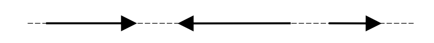
Cuadrante	Corrección
I (0° a 90°)	$\boldsymbol{\alpha} = arc\tan\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$
II (90° a 180°)	$\boldsymbol{\beta} = arc\tan\left(\frac{v_y}{-v_x}\right) + 180°$
III (180° a 270°)	$\boldsymbol{\gamma} = arc\tan\left(\frac{-v_y}{-v_x}\right) + 180°$
IV (270° a 360°)	$\boldsymbol{\delta} = arc\tan\left(\frac{-v_y}{v_x}\right) + 360°$

Tabla: Valores de relaciones trigonométricas			
$[\mathbf{360° = 2\pi\, rad}]$ $\boldsymbol{\theta°\ (rad)}$	$\boldsymbol{sen\ \theta = \frac{v_y}{v}}$	$\boldsymbol{cos\ \theta = \frac{v_x}{v}}$	$\mathbf{tan}\ \boldsymbol{\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} = \frac{v_y}{v_x}}$
0° (0)	0	1	0
$30°(\pi/6)$	0.500	$\sqrt{3/2} \approx 0.866$	$\sqrt{3/3} \approx 0.577$
$45°(\pi/4)$	$\sqrt{2/2} \approx 0.707$	$\sqrt{2/2} \approx 0.707$	1
$60°(\pi/3)$	$\sqrt{3/2} \approx 0.866$	0.500	$\sqrt{3} \approx 1.73$
$90°(\pi/2)$	1	0	∞

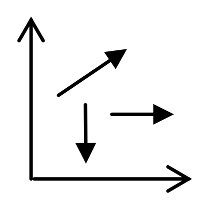
Clasificación de vectores

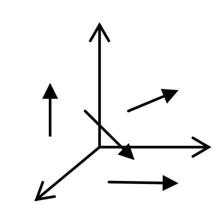
Los vectores se pueden clasificar de acuerdo con diversos criterios. Un criterio toma en cuenta las dimensiones en que se encuentran ubicados. De acuerdo con esto, los vectores se clasifican en: colineales, coplanares y no coplanares o espaciales.

Se tiene un sistema de vectores **colineales** cuando dos o más vectores se encuentran en la misma dirección o línea de acción.

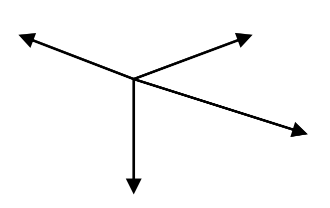


Los vectores son **coplanares** si se encuentran en el mismo plano, o en dos ejes, y **no coplanares o espaciales** si están en diferentes planos, es decir, en tres ejes (x,y,z).



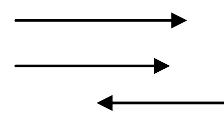


A su vez, los vectores coplanares y no coplanares se pueden clasificar en función a sus direcciones y orígenes en: vectores concurrentes, vectores paralelos y vectores no concurrentes no paralelos.



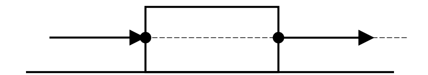
Un sistema de vectores es **concurrente** cuando la dirección o línea de acción de los vectores se cruza en algún punto; el punto de cruce constituye el punto de aplicación de los vectores. A estos vectores se les llama angulares o concurrentes porque forman un ángulo entre ellos.

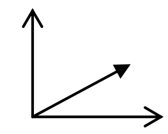
Un sistema de vectores es **paralelo** cuando la dirección o línea de acción de los vectores son paralelas entre sí.



Existen otros tipos de vectores que conviene describir porque aparecen con frecuencia en algunas situaciones; entre éstos se encuentran los vectores deslizantes, libres y los vectores fijos.

Los vectores **deslizantes** son aquellos que se pueden desplazar o deslizar a lo largo de su dirección o línea de acción a un punto arbitrario de la recta en que se encuentra.





El **vector fijo** es el vector que está ligado al origen o punto de aplicación.

Los vectores **libres** son aquellos que no se localizan en un solo punto en común con otros vectores

Resultante y Equilibrante de un sistema de vectores

La resultante de un sistema de vectores es el vector que produce, él sólo, el mismo efecto que los demás vectores del sistema. Por ello, un vector resultante es aquel *capaz de sustituir un sistema de vectores.*

La equilibrante de un sistema de vectores, como su nombre lo indica, es el vector encargado de equilibrar el sistema. Por tanto, tiene la misma magnitud y dirección que la resultante, pero con sentido contrario.

SUMA DE VECTORES

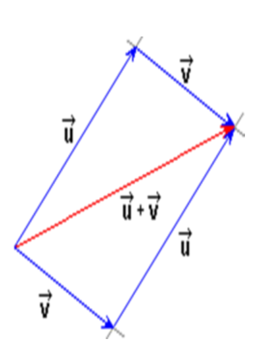
Generalizando, podemos decir que sumar vectores consiste en hallar un vector (conocido como vector suma o vector resultante) cuyo efecto sea el mismo que el que correspondería a todos los vectores (vectores sumados o vectores componentes) cuya suma queremos efectuar si actuaran simultáneamente.

Existen métodos **gráficos** y métodos **analíticos** (o matemáticos) para sumar vectores, estos son:

- *Métodos gráficos*:
  Método del paralelogramo,
  Método del triángulo y
  Método del polígono.
- *Métodos analíticos*:
  Método del paralelogramo (ley de senos y cosenos) y
  Método de componentes rectangulares (teorema de Pitágoras).

Los métodos gráficos nos ayudan a visualizar y a comprender cómo se suman magnitudes vectoriales como los desplazamientos, las velocidades y las fuerzas, sin embargo, son métodos poco exactos. Si queremos conocer con precisión el vector resultante en una suma de vectores, es preferible emplear métodos analíticos, además de que estos son más rápidos de desarrollar.

Método gráfico del Paralelogramo



La suma de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$ obtenido de la siguiente forma:

1) trazamos los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con el mismo origen, por medio de *flechas* previa selección de la escala adecuada conservando cada uno su módulo y angulo.

2) completamos un paralelogramo trazando:
- por el extremo del vector $\vec{u}$ un segmento de recta paralelo al vector $\vec{v}$
- por el extremo del vector $\vec{v}$ un segmento de recta paralelo al vector $\vec{u}$

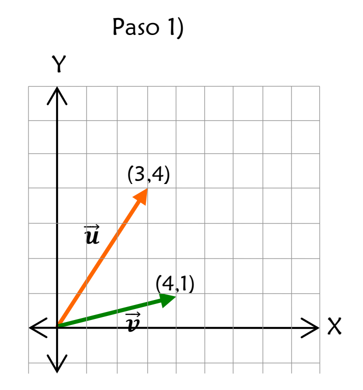
3) la suma de los dos vectores es la diagonal orientada del paralelogramo obtenido.

4) Medir con regla y transportador la magnitud y el ángulo del vector resultante para expresar su valor y dirección de acuerdo a la escala seleccionada.

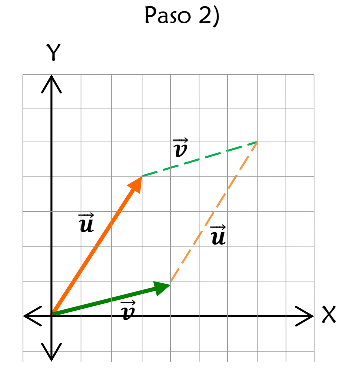
Ejemplo 1:

Obtener por el método gráfico del paralelogramo, el vector resultante $\vec{u}+\vec{v}$, si $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(4,1)$

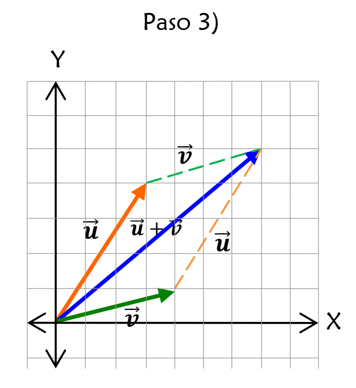
Paso 1)



Paso 2)

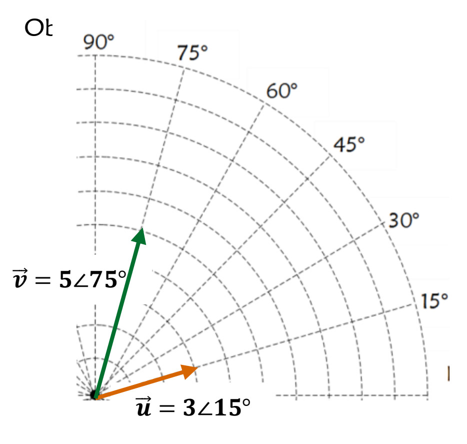


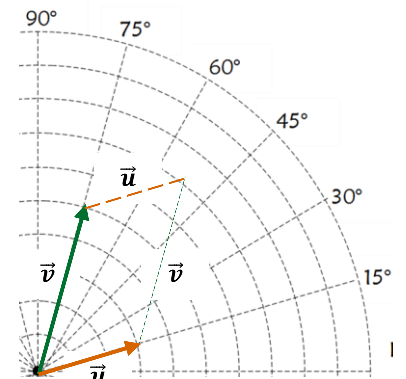
Paso 3)

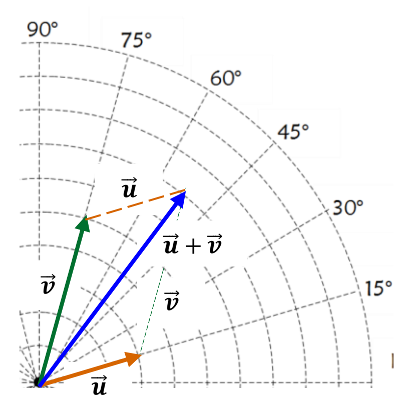


Paso 4) Midiendo el vector resultante:
$\vec{u}+\vec{v}=(7,5)$

Ejemplo 2:







Paso 4) Midiendo el vector resultante
$\vec{u}+\vec{v}=7\angle 53°$

Método gráfico del Triangulo

La suma de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$ obtenido de la siguiente forma:



1) trazamos los dos vectores colocando a $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$, haciendo coincidir el origen de $\vec{v}$ con el extremo de $\vec{u}$, por medio de *flechas* previa selección de la escala adecuada conservando cada uno su módulo y ángulo.

El origen de la suma $\vec{u}+\vec{v}$ es el origen de $\vec{u}$
El extremo de la suma $\vec{u}+\vec{v}$ es el extremo de $\vec{v}$

2) Es decir, $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector que va desde el origen de $\vec{u}$ hasta el extremo de $\vec{v}$ cuando hemos puesto $\vec{v}$ a continuación de $\vec{u}$

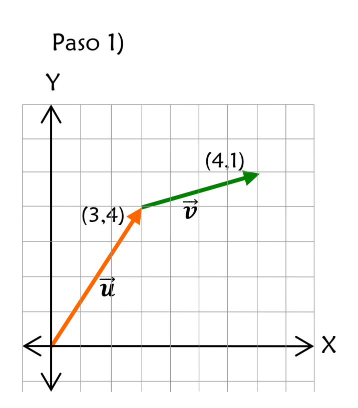
3) Medir con regla y transportador la magnitud y el ángulo del vector resultante para expresar su valor y dirección de acuerdo a la escala seleccionada.

Si sumamos un vector con su opuesto obtenemos un vector reducido a un punto (su origen y extremo coinciden); se trata del vector nulo o vector cero que se expresa $\vec{0}$: $\vec{a}+(-\vec{a})=\mathbf{0}$

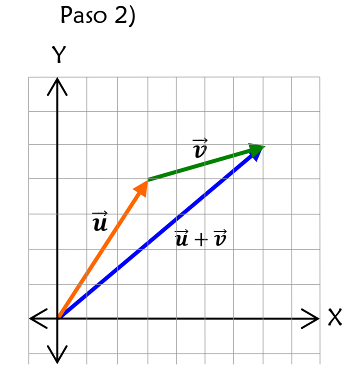
Ejemplo 1:

Obtener por el método gráfico del triángulo, el vector resultante $\vec{u}+\vec{v}$, si $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(4,1)$

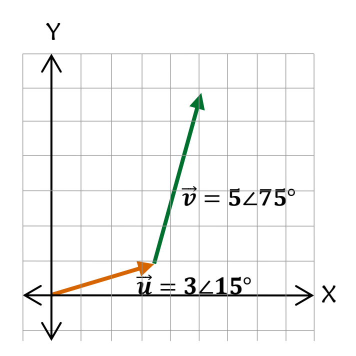
Paso 1)

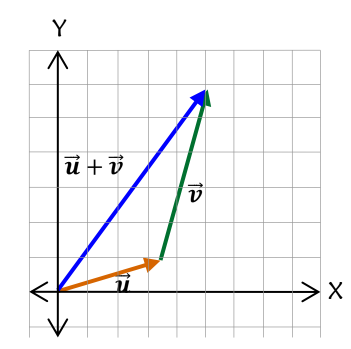


Paso 2)



Paso 3) Midiendo el vector resultante:
$\vec{u}+\vec{v}=(7,5)$





Paso 3) Midiendo el vector resultante:
$\vec{u}+\vec{v}=7\angle 53°$

Método gráfico del Polígono

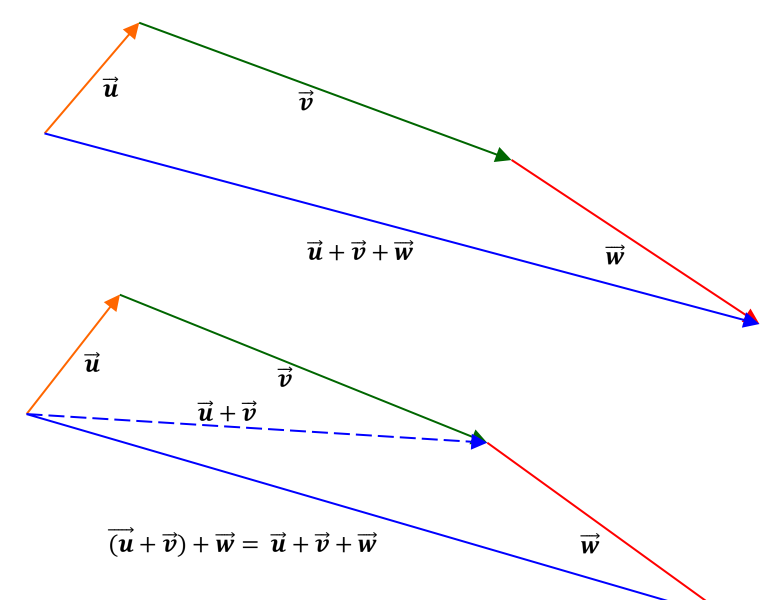
Este método se usa para sumar más de dos vectores ($\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$), dando como resultado otro vector **($\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$)** obtenido de la siguiente forma**:**

1) trazamos los tres o más vectores colocando a $\vec{w}$ a continuación de $\vec{v}$ y este a continuación de $\vec{u}$ haciendo coincidir el origen de $\vec{w}$ con el extremo de $\vec{v}$**,** y el origen de $\vec{v}$ con el extremo de $\vec{u}$**,** por medio de *flechas* previa selección de la escala adecuada conservando cada uno su módulo y ángulo.

2) el origen de la suma $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ es el origen de $\vec{u}$
3) el extremo de la suma $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ es el extremo de $\vec{w}$

Es decir, $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ es el vector que va desde el origen de $\vec{u}$ hasta el extremo de $\vec{w}$ cuando hemos puesto $\vec{w}$ a continuación de $\vec{v}$ y este a continuación de $\vec{u}$**.**

4) Medir con regla y transportador la magnitud y el ángulo del vector resultante para expresar su valor y dirección de acuerdo a la escala seleccionada.



Por lo que, podemos concluir que el método del polígono es una continuación del método del triángulo para sumar un mayor número de vectores.

Esta es la propiedad ASOCIATIVA de la suma de vectores. Gracias a esta propiedad podemos escribir $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ en lugar de $(\overrightarrow{u+v})+\vec{w}$ o de $\vec{u}+(\overrightarrow{v+w})$**.**

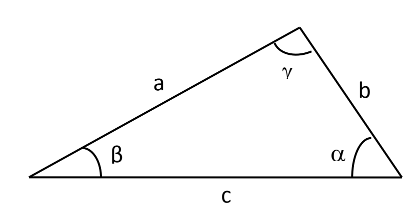
Método analítico del paralelogramo

Este método se puede aplicar cuando generalmente se conocen las magnitudes y direcciones de los vectores, por lo tanto, se conoce también el ángulo que forman entre sí.

Para calcular la magnitud de la resultante se utiliza la Ley de los cosenos y para la dirección del vector resultante se usa la Ley de los senos.

Estas leyes establecen que (ley de senos) en cualquier triangulo oblicuo (aquellos que no tienen ningún ángulo recto) se cumplen las siguientes relaciones:

La ley de los cosenos establece que n cualquier triangulo, en especial en los oblicuos, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma del cuadrado de los otros dos lados, menos su doble producto, multiplicado por el coseno del ángulo formado por estos dos lados.



$$\frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{b}{sen\,\beta}=\frac{c}{sen\,\gamma}$$

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\,\cos\,\alpha$$

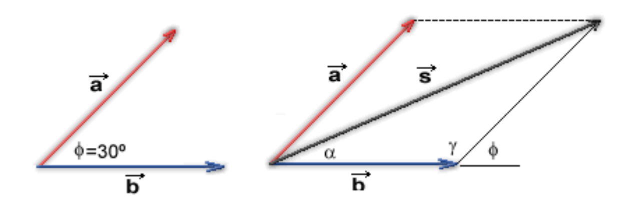
$$b^2=a^2+c^2-2\,ac\,\cos\,\beta$$

$$c^2=a^2+b^2-2\,ab\,\cos\,\gamma$$

Esta ley servirá para encontrar el lado de un triángulo, si se conocen los otros dos, y el ángulo que se forma entre sí. Por lo que podremos encontrar la resultante de la suma de dos vectores concurrentes o angulares.

Ejemplo:

Los vectores ***a*** y ***b*** de la figura tienen magnitudes iguales a 6.0 y 7.0 unidades (u). Si forman un ángulo de 30°, calcular la magnitud y dirección del vector resultante (vector suma) ***s***.



Solución:
Para calcular la resultante **s** podemos aplicar la ley de cosenos. Para ello tengamos en cuenta que los ángulos α y γ son suplementarios:

$$s^2=a^2+b^2-2\,ab\,\cos\gamma$$

$$s^2=(6\,u)^2+(7\,u)^2-2\,(6\,u)(7u)\cos 150° \;\therefore\; s=13\,u$$

Para calcular la dirección del vector resultante, basta con hallar el valor del ánguloα. Para lograr esto podemos utilizar la ley de senos:

$$\frac{a}{sen\,\alpha}=\frac{c}{sen\,\gamma}$$

$$sen\,\alpha=\frac{6\,u\,sen\,150°}{13\,u}\quad\therefore\;\alpha=13°$$

Método analítico de la descomposición de un vector en componentes rectangulares.

Un sistema de vectores puede sustituirse por otro equivalente que contenga un número mayor o menor de vectores que el sistema considerado. Si el sistema equivalente tiene un número mayor de vectores, el procedimiento se llama *descomposición*. Si tiene un número menor de vectores, el procedimiento se denomina *composición*.

El método de descomposición consiste en sustituir un sistema de vectores dado por otro equivalente a sus componentes rectangulares *x*, *y*. Se denominan rectangulares porque las componentes forman entre sí un ángulo recto (90°), también se les denominan componentes perpendiculares.

Con el fin de determinar la magnitud de las componentes de cada vector, utilizamos el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas seno y coseno.

El vector resultante se obtiene de la raíz cuadrada de la suma de las componentes del vector en *x*, *y* al cuadrado, es decir:

$$v_R = \sqrt{\Sigma {v_x}^2 + \Sigma {v_y}^2}$$

Para calcular la dirección del vector resultante, se utiliza la función tangente, que permite despejar el ángulo, es decir,

$$\tan\theta = \frac{\Sigma v_y}{\Sigma v_x}$$

Ejemplo 1:

$Si\ \vec{\boldsymbol{A}} = (3,4) y\ \vec{\boldsymbol{B}} = (4,1).\ \ Obtener\ el\ vector\ resultante\ \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}$

Vector	V_x	V_y
A	3	4
B	4	1
ΣV	7	5

$$V_R = \sqrt{7^2 + 5^2} = 8.6$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{5}{7}\right) = 35.5°$$

Como el vector resultante está en el primer cuadrante: *x* (+), *y* (+), el ángulo de 35.5° es un ángulo real.

$$V_R = (7,5) = 8.6\angle 35.5°$$

Ejemplo 2:

$Si\ \vec{\boldsymbol{A}} = 3\angle 15° y\ \vec{\boldsymbol{B}} = 5\angle 75°.\ \ Obtener\ el\ vector\ resultante\ \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}$

V	θ	$Vx = V\cos\theta$	$Vy = V\,sen\,\theta$
3	15°	2.9	0.77
5	75°	1.3	4.8
	Σ	4.2	5.6

$$V_R = \sqrt{4.2^2 + 5.6^2} = 7$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{5.6}{4.2}\right) = 53.1°$$

Como el vector resultante está en el primer cuadrante: *x* (+), *y* (+), el ángulo de 53.1° es un ángulo que corresponde al 1er. cuadrante.

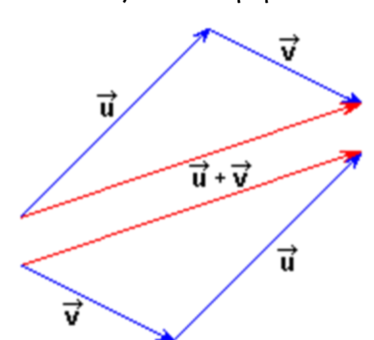
$$V_R = (4.2, -5.6) = 7\angle 53.1°$$

Propiedades de los vectores

Igualdad de dos vectores

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son iguales si tienen la misma magnitud, la misma dirección, el mismo sentido y el mismo origen. Si los dos vectores no tienen el mismo origen, se dice entonces que son dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son equipolentes.

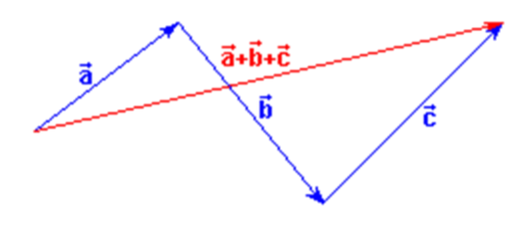
Propiedad conmutativa de la suma

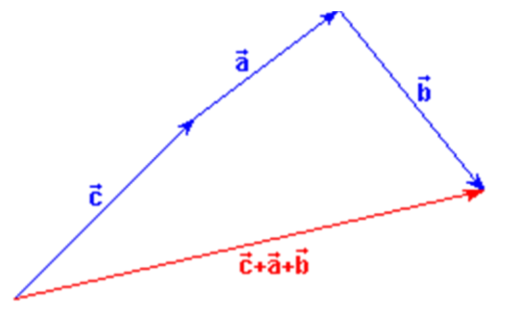


Se dice que la suma vectorial es conmutativa, es decir, que el orden en que se sumen los vectores no altera el valor, dirección y sentido del vector resultante.

Simbólicamente, esta propiedad se expresa por: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

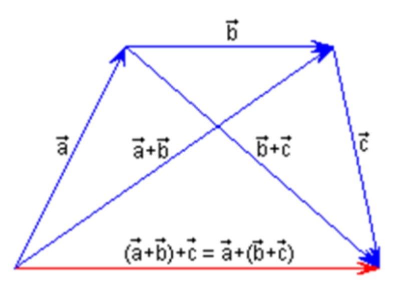
Y si son tres vectores: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \;=\; \vec{c}+\vec{a}+\vec{b}$





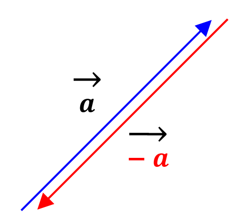
Propiedad asociativa de la suma

La suma vectorial obedece a la propiedad asociativa, es decir, que la suma de más de dos vectores, por ejemplo para sumar tres vectores, se pueden sumar primero dos $(\vec{a}+\vec{b})$ y la resultante obtenida de éstos se suma con el tercer vector $(\vec{c})$ para obtener el vector resultante.



Pero este vector resultante se pudo obtener de sumar el primer vector $(\vec{a})$ con la resultante de sumar $(\vec{b}+\vec{c})$.

Esto se expresa de la siguiente manera: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \;=\; \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



Negativo de un vector

Se define como aquel vector $(-\vec{a})$ que sumado a v da cero, es decir, $\vec{a}+(-\vec{a})=\mathbf{0}$.
El negativo de cualquier vector tiene la misma dirección y magnitud que éste, pero su sentido es contrario.

Productos Vectoriales

En muchas situaciones físicas se requiere efectuar una multiplicación entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales, o entre ellas mismas.

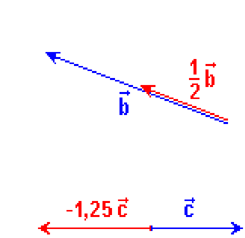
Los productos vectores que nos serán útiles para explicar ciertos fenómenos son:

1. Producto de un escalar por un vector
2. Producto escalar o producto punto de dos vectores
3. Producto vectorial o producto cruz de dos vectores

Producto de un escalar por un vector

Se define el producto de un número **m** por un vector $\vec{\mathbf{u}}$ como el vector $\mathbf{m}\vec{\mathbf{u}}$ que tiene:
1) dirección: la misma que $\vec{\mathbf{u}}$
2) sentido: el mismo que $\vec{\mathbf{u}}$ si **m** es positivo
opuesto al de $\vec{\mathbf{u}}$ si **m** es negativo
3) módulo: el módulo de $\vec{\mathbf{u}}$ multiplicado por el **valor absoluto** de **m**

Si **m**=0 el vector $\mathbf{m}\vec{\mathbf{u}}$ es el vector nulo, un vector que tiene módulo 0 y que se indica por $\vec{\mathbf{0}}$. Es decir, 0 $\vec{\mathbf{u}}$ = $\vec{\mathbf{0}}$.



Resumiendo, multiplicar un vector por un número **m** equivale a alargar (o encoger) su módulo tantas veces como indica el valor absoluto de **m**, e invertir su sentido si **m** es negativo.

El número **m** por el que se multiplica un vector recibe el nombre de **escalar**.

$$m\vec{u} = m\left(\vec{u_x}, \vec{u_y}\right) = \left(m\vec{u_x}, m\vec{u_y}\right)$$

Ejemplo: $2\hat{v} = 2(3{,}4) = [(2x3),(2x4)] = (6{,}8);$

Resulta un vector que tiene la misma dirección pero modifica su magnitud.

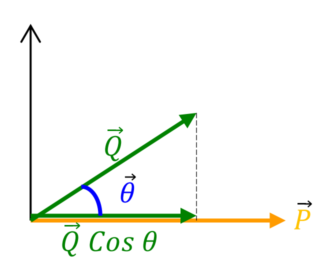
Ejemplo: $-1\hat{v} = -1(3{,}4) = [(-1x3),(-1x4)] = (-3,-4);$

Resulta un vector de igual magnitud pero con sentido contrario, el cual se puede expresar simplemente $-\vec{v}$.

Producto escalar o producto punto de dos vector

Al producto escalar entre dos vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ lo designamos como $\vec{P}\cdot\vec{Q}$. Por definición, es el resultado de la magnitud del vector $\vec{P}$ por la magnitud del vector $\vec{Q}$ por el coseno del ángulo que se forman entre ellos. Es decir:

$$\vec{\boldsymbol{P}}\cdot\vec{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{P\,Q\,Cos\,\theta}$$



Si observamos la figura podemos interpretar esta operación vectorial como el producto de la proyección del vector $\vec{Q}$ sobre el vector $\vec{P}$ por la magnitud de $\vec{P}$ ($\vec{Q}$).

Muchas relaciones físicas se pueden expresar como este producto. Llevamos los dos vectores a un origen común, siendo θ el ángulo que forman entre sí los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.

El resultado de este producto es una cantidad escalar (un número) y puede ser positivo, negativo o nulo.

Si el ángulo entre los vectores es menor que 90º el producto escalar es positivo, si es mayor que 90º pero menor que 180º el producto es negativo y si es igual a 90° el producto escalar es nulo.

Atención: El producto escalar de dos vectores perpendiculares es **cero**.

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \widehat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \widehat{\boldsymbol{k}} = \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = \mathbf{0}$$

Las otras posibilidades, tales como $\hat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}$, dan los mismos resultados debido a la propiedad *conmutativa*.

Ejemplo:

Dos vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ cuyas magnitudes son iguales a 20.4 unidades (u) y 30.6 unidades (u) forman un ángulo de 60º. Calcular su producto escalar.

Solución:

Según la definición, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = P\,Q\,Cos\,\theta$

por tanto: $\vec{P} \cdot \vec{Q} = (20.4\,u)(30.6\,u)Cos\,60° = 312\,u^2$

El producto punto de dos vectores **en función de los vectores unitarios.**

Si **A** = $(a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{\mathbf{\imath}} + a_y\hat{\mathbf{\jmath}} + a_z\mathbf{k}$ y **B** = $(b_x, b_y, b_z) = b_x\hat{\mathbf{\imath}} + b_y\hat{\mathbf{\jmath}} + b_z\mathbf{k}$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (\,a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\widehat{\boldsymbol{k}}) \cdot (\,b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\widehat{\boldsymbol{k}})$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = ((\,a_x\hat{\boldsymbol{\imath}})(b_x\hat{\boldsymbol{\imath}})) + \left((\,a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}})(b_y\hat{\boldsymbol{\jmath}})\right) + \left((\,a_z\widehat{\boldsymbol{k}})(b_z\widehat{\boldsymbol{k}})\right)$$

Ejemplo 1: Si **A** = (1, 2, 3) = $\hat{\mathbf{\imath}} + 2\hat{\mathbf{\jmath}} + 3\widehat{\boldsymbol{k}}$ y **B** = (-3, 0, 4) = $-3\hat{\mathbf{\imath}} + 4\widehat{\boldsymbol{k}}$

A · B = $(\hat{\mathbf{\imath}} + 2\hat{\mathbf{\jmath}} + 3\widehat{\boldsymbol{k}}) \cdot (-3\,\hat{\mathbf{\imath}} + 0\,\hat{\mathbf{\jmath}} + 4\,\widehat{\boldsymbol{k}})$

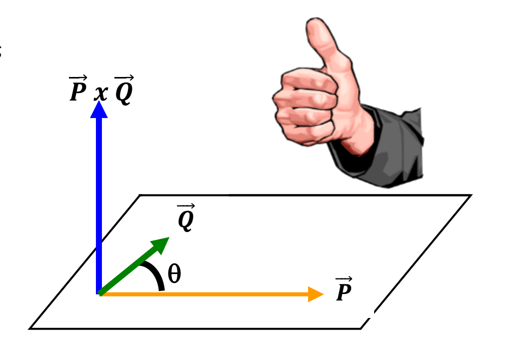
A · B = (1)(-3)+ (2)(0) + (3)(4) = -3 + 0 +12 = **9**

Ejemplo 2: Si **F** = (-30, 40, 0) = $-30\hat{\mathbf{\imath}} + 40\hat{\mathbf{\jmath}}$ y **S** = (1, 2, 0) = $\hat{\mathbf{\imath}} + 2\hat{\mathbf{\jmath}}$

$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{S} =$ (-30)(1) + (40)(2) = -30 + 80 = **50** $[N\,m = \boldsymbol{Joule}]$

Producto vectorial o producto cruz de dos vector

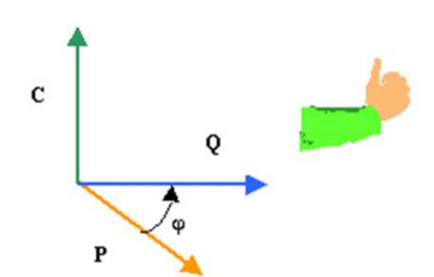
Al producto vectorial entre dos vectores concurrentes $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ lo designamos como $\vec{P}\ x\ \vec{Q}$, que tiene las siguientes propiedades:

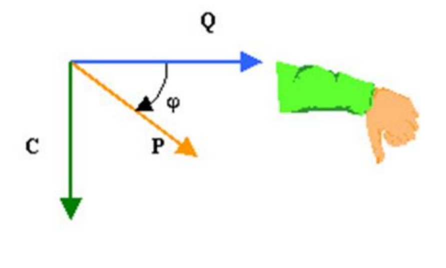


1. $\vec{P}\ x\ \vec{Q}$ es perpendicular al plano de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$
2. El sentido de $\vec{P}\ x\ \vec{Q}$ obedece a la regla de la mano derecha

Regla de la mano derecha

Colocamos la palma de nuestra mano derecha en la dirección del vector $\vec{P}$ y envolvemos nuestros dedos en el sentido de rotación hacia el vector $\vec{Q}$ eligiendo siempre el menor ángulo posible manteniendo erecto el pulgar. El sentido en que apunta el pulgar, es el sentido del producto vectorial $\vec{P}\ x\ \vec{Q}$





3. La magnitud de $\vec{P}\ x\ \vec{Q}$ es el producto de las magnitudes $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y sen θ, donde θ es el ángulo entre $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.

$$\vec{P}\ x\ \vec{Q} = P\ Q\ Sen\ \theta$$

Como podrás observar no es lo mismo hacer el producto vectorial de $\vec{P}\ x\ \vec{Q}$ que el de $\vec{Q}\ x\ \vec{P}$. Un vector se define por tres números que designan, módulo, dirección y sentido. En los dos casos tanto el módulo como la dirección no cambian pero el sentido es opuesto

A diferencia con el producto escalar, el resultado de este producto es un vector, cuya dirección es perpendicular al plano que contiene a los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, cuyo sentido se obtiene aplicando la denominada *regla de la mano* derecha y cuyo módulo (magnitud) es igual al producto entre las magnitudes de los vectores por el seno del ángulo que forman.

Ten en cuenta además que si $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ son paralelos (ángulo entre ellos igual a 0º) o antiparalelos (ángulo entre ellos igual a 180º) el producto vectorial será nulo. En particular, el producto vectorial de un vector por sí mismo es cero.

Los productos vectoriales *no son conmutativos*, de manera que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ pero $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$

Los productos vectoriales son distributivos, de modo que, para los tres vectores **A**, **B** y **C**,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

La propiedad distributiva es la base de la determinación cuantitativa del producto vectorial en términos de las componentes vectoriales. Para el caso general tridimensional,

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \, x \, \mathbf{B} = \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right) x \left(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}\right) = (A_x\boldsymbol{i})\text{x}(B_x\boldsymbol{i}) + (A_x\boldsymbol{i})\text{x}\left(B_y\boldsymbol{j}\right) + \ldots + (A_z\boldsymbol{k})\text{x}(B_z\boldsymbol{k})$$

Esta ecuación se puede simplificar debido a que todos los productos vectoriales posibles de los vectores unitarios son, según la definición,

î x ĵ = (1)(1) Sen 90°= **k** ;	**ĵ x î** = (1)(1) Sen 270°= **- k** ;	**î x î** = (1)(1) Sen 0°= **0**
ĵ x k = (1)(1) Sen 90°= **î** ;	**k x ĵ** = (1)(1) Sen 270°= **- î** ;	**ĵ x ĵ** = (1)(1) Sen 0°= **0**
k x î = (1)(1) Sen 90°= **ĵ** ;	**î x k** = (1)(1) Sen 270°= **- ĵ** ;	**k x k** = (1)(1) Sen 0°= **0**

Estas ecuaciones también se pueden obtener con el método utilizado para calcular un determinante.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{bmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{bmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{bmatrix} \boldsymbol{k}$$

- +

$$\mathbf{V} = +\left(A_yB_z - A_zB_y\right)\boldsymbol{i} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\boldsymbol{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{V} = A_yB_z\boldsymbol{i} + A_zB_x\boldsymbol{j} + A_xB_y\boldsymbol{k} - A_yB_x\boldsymbol{k} - A_xB_z\boldsymbol{j} - A_zB_y\boldsymbol{i}$$

<u>Ejemplo 1</u>: Si **A** = (1, 2, 3) = **î** + 2**ĵ** +3$\hat{\boldsymbol{k}}$ y **B** = (-3, 0, 4) = -3î +4$\hat{\boldsymbol{k}}$

$$\boldsymbol{A} \, \boldsymbol{x} \, \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$= (8-0)\hat{\boldsymbol{\imath}} - \left(4-(-9)\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left(0-(-6)\right)\hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{8}\hat{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{13}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{6}\hat{\boldsymbol{k}}$$

<u>Ejemplo 2</u>: Si **r** = (1, 2, 0) = **î** + 2**ĵ** y **F** = (-30, 40, 0) = -30î + 40**ĵ**

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{par}} = \boldsymbol{r} \, \boldsymbol{x} \, \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -30 & 40 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 40 & 0 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -30 & 0 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -30 & 40 \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$= (0-0)\hat{\boldsymbol{\imath}} - (0-0)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \left(40-(-60)\right)\hat{\boldsymbol{k}} = 0\hat{\boldsymbol{\imath}} - 0\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 100\hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{100}\hat{\boldsymbol{k}}$$